

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler  
Redactor: R. Sängier

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

ERISMANN, TH.: Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes . . . . .	355
DAS, S. CH.: On the Concentration of Stresses Due to a Small Elliptic Inclusion on the Neutral Axis of a Deep Beam under Constant Bending Moment . . . . .	389
IBRAHIM, A. A. K., and KABIEL, A. M. I.: The Theory of an Oscillating Cylinder Viscometer . . . . .	398
MÜLLER, J.: Untersuchungen über Elektronenströmungen (II. Teil) . . . . .	409

## *Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves*

BUHLER, H.: Bestimmung der Übergangsfunktion eines Regelkreises aus dessen Frequenzgang . . . . .	420
RAO, R. S., and NIGAM, S. D.: The Effect of Cross-Viscosity and the Performance of Full Journal Bearing without Side-Leakage . . . . .	426

## *Varia - Miscellaneous - Divers*

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 8. Mai 1954 in Solothurn	430
Bemerkungen über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren. Von O. DÖHLE and W. KLEEN . . . . .	437
Erwiderung auf die voranstehenden Bemerkungen über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren. Von F. LÜDI . . . . .	438
Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik vom 31. Mai bis 4. Juni 1955 in Berlin . . . . .	441
Acknowledgment . . . . .	441
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	441

UNIVERSITY OF CHICAGO  
LIBRARY  
JAN 3 1955

ZAMP	Vol. V	Fasc. 5	Pag. 355-442	15. 9. 54
------	--------	---------	--------------	-----------

Verlag Birkhäuser Basel, Schweiz

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängcr, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten von Fr. 15.—* pro Seite zu entrichten. Für Arbeiten, die mehr als 24 Seiten Umfang aufweisen, bedarf es einer Verständigung mit der Redaktion.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contribution to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in another than the original language. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free copies of separata prints without cover. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution of Fr. 15.—* per page exceeding the 16 pages. In case of articles of more than 24 pages, a special arrangement has to be made with the Editor.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution de Fr. 15.—* doit être payée par page supplémentaire. Dès qu'il s'agit de 24 pages ou plus, l'auteur est prié de se mettre en relation avec la rédaction.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 38.—, Ausland Fr. 48.—, Einzelnummer Fr. 10.—

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 38.—, foreign Fr. 48.—, single copy Fr. 10.—

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 38.—, étranger Fr. 48.—, le numéro Fr. 10.—

Postabonnement - Post-Office Subscription - Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg  
Italien

Dänemark  
Marokko

Deutschland  
Norwegen

Finnland  
Portugal

Holland  
Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces:  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 165.—,  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr. 38.—,  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 50.—

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés

Copyright 1954 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland



# Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes

Von THEODOR ERISMANN, Schaffhausen<sup>1)</sup>

## Problemstellung

Reibungsgetriebe mit kugelförmigen Übertragungsgliedern werden in der Technik zu verschiedenen Zwecken verwendet, wobei die besonderen Eigenschaften kugel- und kugelkalottenförmiger Körper vor allem für die Erzielung stufenloser Drehzahländerung herangezogen werden. Kaum eine dieser Konstruktionen ist als konsequenter Ausfluss eines das ganze in Frage stehende Gebiet umfassenden Wissens anzusehen; vielmehr herrscht der Charakter der Erfindung ad hoc vor, bei der nur ein einzelnes konkretes Problem angegangen und nach dessen Lösung die Forschungsarbeit abgebrochen wird. Dieser Zustand ist bedauerlich, denn es wird dabei immer wieder eine grosse Menge an Scharfsinn und Gedankenarbeit für die Lösung von Einzelaufgaben verwendet, wobei jedes Problem fast gänzlich von Grund auf neu beackert werden muss, weil den vorhergehenden Arbeiten der Anspruch auf allgemeine Gültigkeit fehlt.

Die vorliegende Studie stellt einen Versuch dar, diesen Mangel – wenigstens für ein wichtiges Teilgebiet – durch Schaffung einer universell anwendbaren Theorie zu beseitigen. Dass dies nicht schon früher geschehen ist, erscheint nach den hervorragenden Ansätzen von HELE SHAW [1]<sup>2)</sup> sehr bedauerlich. Denn das zur Diskussion stehende Gebiet birgt eine Reihe unausgeschöpfter praktischer Möglichkeiten, wie sich der Leser leicht an Hand der Anwendungsbeispiele in den beiden letzten Abschnitten dieser Arbeit überzeugen kann. Es kommt jedenfalls nicht von ungefähr, dass der Verfasser gerade durch intensive praktische Beschäftigung mit Kugelgetrieben zu einer theoretischen Durchleuchtung des Gebietes angeregt wurde.

## Grundbegriffe

Es soll im weiteren nur von *echten Kugelgetrieben* die Rede sein, deren Definition folgende *Hauptsätze* umfassen möge:

1. Das Getriebe besteht aus einer und nur einer Kugel und mehreren Rollen in der Form beliebiger Rotationskörper, die die Kugel in je einem Punkt berühren und den Kugelmittelpunkt in einer unveränderlichen Lage festhalten.

<sup>1)</sup> Alfred J. Amsler & Co.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 388.

2. Die Kugel ist mit der Umwelt ausschliesslich durch die Rollen verbunden und erhält von diesen eine eindeutig bestimmte Drehbewegung.
3. Bei sämtlichen vorkommenden Bewegungen dürfen im Rahmen der fabrikatorisch bedingten Genauigkeiten nur abrollende, nicht aber gleitende Relativbewegungen zwischen der Kugel und den Rollen auftreten.
4. Die Rollendrehachsen dürfen keine Bewegungen ausführen, bei denen sich ihre Abstände vom Kugelmittelpunkt verändern.
5. Kugel und Rollen bestehen aus Materialien, deren Härte nennenswerte Deformationen durch die auftretenden Kräfte ausschliesst.

Ferner ist noch ein wesentlicher Ausdruck zu definieren, der in der Folge immer wieder Verwendung finden soll: Als *homoplane Ebene* einer Geraden sei die von dieser Geraden und dem Kugelmittelpunkt aufgespannte Ebene bezeichnet. Zwei Gerade heissen homoplan, wenn sie in einer gemeinsamen homoplanen Ebene liegen; zwei Rollen heissen homoplan, wenn ihre Drehachsen homoplan sind.

Es gibt nur drei Typen von Rollenanordnungen, die dem vierten der obigen Hauptsätze genügen. Es sind dies:

1. Die *feste Rolle*, deren Drehachse ein für allemal in ihrer Lage im Raum festgelegt ist.
2. Die *Steuerrolle*, deren Drehachse um eine durch den Kugelmittelpunkt gehende Schwenkachse schwenkbar angeordnet ist, wobei diese beiden Achsen homoplan sind.
3. Die *Schlepprolle*, deren Drehachse um eine durch den Kugelmittelpunkt gehende Schwenkachse schwenkbar angeordnet ist, wobei diese beiden Achsen nicht homoplan sind.

Wie später gezeigt wird, müssen Steuerrollen stets durch äussere Einwirkung geschwenkt werden. Man kann sie daher für jeden Zeitquerschnitt in gleicher Weise betrachten wie die festen Rollen. So rechtfertigt sich eine Zusammenfassung dieser beiden Typen unter dem Sammelbegriff *Leitrolle*.

Dass die so definierten Getriebe in der Tat die Bezeichnung «echte» Kugelgetriebe verdienen, ergibt sich nicht nur aus dem Umstand, dass hier eine und nur eine Kugel im Zentrum der Betrachtung steht. Vielmehr kommen bei diesen Getrieben alle spezifischen Eigenschaften der Kugel bereits restlos zur Geltung, und man darf wohl die Behauptung wagen, dass durch eine weitere Fassung des Begriffes an technischen Möglichkeiten nicht viel gewonnen wäre (abgesehen natürlich vom Aneinanderreihen mehrerer derartiger Getriebe, das selbstverständlich neue Kombinationen bietet). Ohne auf die tieferen Zusammenhänge einzugehen, kann man jedenfalls feststellen, dass die Kugel – wie die Ebene – sich durch die gänzliche Abwesenheit singulärer Punkte auf ihrer Oberfläche auszeichnet und dass man daher auf einer Kugelfläche mit wenigen Ausnahmen alle Operationen auf beschränktem Raum durchführen kann, die sonst nur zu verwirklichen wären, wenn eine unendlich grosse ebene Fläche



zur Verfügung stünde. Es sei dem aufmerksamen Leser überlassen, zu jedem der weiter unten folgenden Beispiele einen Analogiefall auf der Ebene zu konstruieren.

### Theorie des idealen Kugelgetriebes

Unter einem *idealen Kugelgetriebe* wollen wir ein echtes Kugelgetriebe verstehen, dessen Definition durch folgende Zusätze ergänzt ist:

1. Der fünfte Hauptsatz wird dahingehend verschärft, dass ein unendlich hartes Material für Kugel und Rollen angenommen wird, so dass die Berührungspunkte unendlich klein sind.
2. Der Reibungskoeffizient zwischen Kugel und Rollen soll so gross sein, dass die übertragbaren Drehmomente stets grösser sind als die tatsächlich auftretenden.
3. Wo von homoplanen Rollen die Rede ist, werden mathematisch genau homoplane Achsen verlangt.

Wie man im Laufe der Untersuchung sehen wird, vereinfacht der erste dieser Zusätze die Theorie in hohem Masse, wobei er aber des zweiten – und dieser seinerseits wiederum des dritten – bedarf, um sinnvoll zu sein.

Nachdem man sich so über die Voraussetzungen der Theorie klar geworden ist, muss zuerst die Frage beantwortet werden, welche Bewegungen die Kugel überhaupt ausführen kann und welchen Einfluss die einzelnen Rollentypen auf diese Bewegungen ausüben.

Eine Kugel, deren Mittelpunkt in seiner Lage festgehalten wird, besitzt offenbar noch drei Drehungs-Freiheitsgrade. Eine um ihre Drehachse reibungsfrei gelagerte Leitrolle zwingt den Berührungspunkt, sich senkrecht zu ihrer homoplanen Ebene zu bewegen. Dies ist nur möglich, wenn die Kugel- und die Leitrollendrehachse homoplan sind. Daraus ergibt sich eine Reihe trivialer Sätze, deren Beherrschung den Überblick über einen konkret gegebenen Fall in hohem Masse erleichtert:

Die Kugeldrehachse ist homoplan zu allen vorhandenen Leitrollendrehachsen.

Eine frei laufende Leitrolle vermindert im allgemeinen die Zahl der Freiheitsgrade der Kugel um eins (festgelegt ist dabei die Ebene, in der die Kugeldrehachse liegt, frei bleibt noch deren Richtung innerhalb dieser Ebene sowie die Winkelgeschwindigkeit der Drehung).

Zwei zueinander inhomoplane, frei laufende Leitrollen bestimmen die Lage der Kugeldrehachse eindeutig.

Untereinander homoplane, frei laufende Leitrollen sind bezüglich ihres Einflusses auf die Lage der Kugeldrehachse gleichwertig.

Es können beliebig viele untereinander homoplane frei laufende Leitrollen an der Kugel angreifen, ohne je durch ihre Vielzahl eine Überbestimmtheit der Kugelbewegung zu bewirken.

Eine angetriebene Leitrolle zwingt dem Berührungspunkt nicht nur eine bestimmte Richtung, sondern auch eine bestimmte Geschwindigkeit auf. Daraus ergeben sich die Sätze:

Eine angetriebene Leitrolle vermindert im allgemeinen die Zahl der Freiheitsgrade der Kugel um zwei (festgelegt ist die Ebene der Kugeldrehachse und die Winkelgeschwindigkeitskomponente der Kugel um die zur Verbindungsgeraden vom Kugelmittelpunkt zum Berührungspunkt senkrechte Achse, frei bleibt noch die Winkelgeschwindigkeitskomponente um die erwähnte Verbindungsgerade).

Der Einfluss einer angetriebenen Leitrolle auf die Kugeldrehung ist bestimmt durch ihre homoplane Ebene sowie durch die Lage und Umfangsgeschwindigkeit ihres Berührungspunktes mit der Kugel.

Neben einer angetriebenen Leitrolle können beliebig viele dazu homoplane freilaufende Leitrollen an der Kugel angreifen, ohne die Zahl ihrer Freiheitsgrade weiter zu beeinflussen.

Es muss hier noch auf eine Besonderheit der Steuerrolle hingewiesen werden: Ihr Berührungspunkt liegt – wie bei jeder Rolle – stets auf dem Schnittpunkt ihrer homoplanen Ebene mit der Kugel, und die Bewegung dieses Punktes erfolgt senkrecht zur homoplanen Ebene. An einer freilaufenden Rolle kann eine Kraft offenbar nur in achsparalleler Richtung durch den Berührungspunkt übertragen werden. Somit liegt bei der frei laufenden Steuerrolle sowohl die Wirkungslinie der übertragenen Kraft als auch die Schwenkachse in der homoplanen Ebene, und es kann von dieser Kraft kein Moment um die Schwenkachse erzeugt werden. Bei einer angetriebenen Steuerrolle entsteht ein solches Moment zwar durch das Antriebsmoment; dies führt aber nicht zu einer eindeutigen Lage der homoplanen Ebene, sondern zu einer ständigen Drehbewegung derselben. Hier liegt der Grund, weshalb eine um ihre Schwenkachse frei schwenkbare Steuerrolle keine Bedeutung für die weiteren Untersuchungen hat.

Gerade umgekehrt verhält es sich bei der Schlepprolle. Hier erzeugt eine in Richtung der Rollendrehachse wirkende Kraft stets ein Moment um die Rollenschwenkachse, oder es kommt – wenn die Rolle reibungsfrei schwenkbar ist – zu einer Schwenkung, die so lange andauert, bis die Rolle zur Kugeldrehachse homoplan geworden ist. Durch die Möglichkeit einer gleichzeitigen Roll- und Schwenkbewegung gestattet die freilaufende und frei schwenkbare Schlepprolle dem Berührungspunkt eine Bewegung mit beliebiger Geschwindigkeit und in beliebiger Richtung, und man kann feststellen:

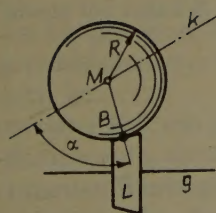
Eine frei schwenkbare und frei laufende Schlepprolle vermindert die Zahl der Freiheitsgrade der Kugel nicht.

Es können also beliebig viele frei schwenkbare und freilaufende Schlepprollen an der Kugel angreifen, ohne je eine Überbestimmtheit der Kugelbewegung zu bewirken.



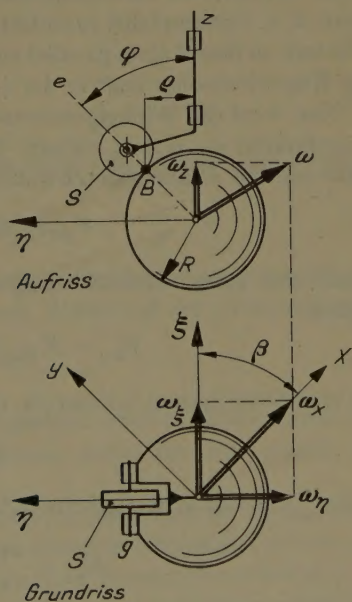
Eine frei schwenkbare angetriebene Schlepprolle vermindert im allgemeinen die Zahl der Freiheitsgrade der Kugel um eins (festgelegt ist die Winkelgeschwindigkeitskomponente um die zur Verbindungsgeraden vom Kugelmittelpunkt zum Berührungspunkt senkrechte Achse, frei bleibt die durch zwei Freiheitsgrade gekennzeichnete Lage der Kugeldrehachse).

Eine durch äussere Einflüsse geschwenkte Schlepprolle wirkt im wesentlichen wie eine Leitrolle. Während aber eine Steuerrolle beim Schwenken nur die Lage der Kugeldrehachse verändert, der Kugel aber keine zusätzliche Drehung aufzwingt (sie kann auch bei stillstehender Kugel geschwenkt werden), entsteht hier unweigerlich eine parasitäre Kugeldrehung. Dieser scheinbar unwesentliche Unterschied ist so folgenswer, dass eine von aussen geschwenkte Schlepprolle grundsätzlich als uninteressant bezeichnet werden kann. Unter einer Schlepprolle wird daher in der Folge stets eine frei schwenkbare Schlepprolle, unter einer Steuerrolle stets eine von aussen geschwenkte Steuerrolle verstanden.



Figur 1

Abrollen einer festen Rolle auf der Kugel.



Figur 2

Verhalten einer Schlepprolle.

Die numerischen Verhältnisse sind bei einer Leitrolle ausserordentlich einfach. Betrachtet man die homoplane Ebene einer um die Achse  $g$  rotierenden Leitrolle  $L$  (Figur 1), so stellt man fest, dass die Umfangsgeschwindigkeit  $V_B$  des Berührungspunktes  $B$  bei einem Kugelradius  $R$ , einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Kugel um die Achse  $k$  und bei einem Winkel  $\alpha$  zwischen  $k$  und der

Verbindungsgeraden vom Kugelmittelpunkt  $M$  nach  $B$  durch die Beziehung

$$V_B = R \omega \sin \alpha \quad (1)$$

gegeben ist.

Wesentlich unübersichtlicher sind die Verhältnisse bei der Schlepprolle, vorab weil sich hier das Hauptinteresse nicht auf die Dreh-, sondern auf die Schwenkbewegung der Rolle richtet. Mit Vorteil betrachtet man zunächst einen orthogonalen Sonderfall, der sich nachträglich ohne grosse Mühe zu allgemeiner Gültigkeit ausbauen lässt.

Die in Figur 2 dargestellte Schlepprolle  $S$  zeichnet sich dadurch aus, dass ihre Drehachse  $g$  senkrecht zur Schwenkachse  $z$  steht und dass der Berührungspunkt  $B$  der höchste Punkt des Schnittkreises der homoplanen Ebene  $e$  mit der Kugel ist. Der Kugelradius wird mit  $R$  angesetzt. Zwischen  $e$  und  $z$  liegt der «Schleppwinkel»  $\varphi$ .

Es werden zwei kartesische Koordinatensysteme,  $x, y, z$  und  $\xi, \eta, z$ , eingeführt.  $x, y, z$  ist zunächst raumfest.  $\xi, \eta, z$  macht die Schwenkungen der Schlepprolle mit, so dass  $\xi$  stets parallel zu  $g$  bleibt und mit  $x$  den Winkel  $\beta$  einschliesst. Die Kugeldrehachse liegt in der  $(x, z)$ -Ebene.

Nun wird die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Kugel nach den mitbewegten Koordinaten  $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_z$  zerlegt. Unter dem Einfluss von  $\omega_\xi$  dreht sich die Rolle mit der Umfangsgeschwindigkeit

$$V_{B\xi} = R \omega_\xi = R \omega_x \cos \beta, \quad (2)$$

erhält aber keine Schwenkbewegung.  $\omega_\eta$  bewirkt in  $B$  eine Umfangsgeschwindigkeit

$$V_{B\eta} = R \omega_\eta \cos \varphi = R \omega_x \sin \beta \cos \varphi, \quad (3)$$

die eine Schwenkung hervorruft, und zwar – da sich  $B$  dabei auf einem Radius

$$\varrho = R \sin \varphi \quad (4)$$

dreht – mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega_{z\eta} = \frac{V_{B\eta}}{\varrho} = \omega_x \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi. \quad (5)$$

Dieser Drehung überlagert sich die durch einfache Mitnahme entstehende Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega_{zz} = \omega_z, \quad (6)$$

so dass die Schwenkung durch

$$\Omega_z = \Omega_{z\eta} + \Omega_{zz} = \omega_x \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi + \omega_z \quad (7)$$

gekennzeichnet ist.



Das Schwenkverhalten einer Schlepprolle ist durch die Beziehungen (5), (6) und (7) restlos umschrieben, und es lohnt sich, kurz die wesentlichsten Punkte dieses Verhaltens festzustellen.

Fragt man sich nach den Gleichgewichtslagen, so findet man, dass diese durch das Verschwinden von  $\Omega_z$  und somit durch

$$\omega_z = -\omega_x \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi \quad (8)$$

gekennzeichnet sein müssen, was offenbar nur möglich ist, wenn

$$\frac{\omega_z}{\omega_x} \leq \operatorname{ctg} \varphi \quad (9)$$

ist.

Für den praktisch wichtigen Fall der nur aus der einen Komponente  $\omega_x$  bestehenden Kugeldrehung erhält man für die Schwenkung

$$\Omega_z = \Omega_{z\eta} = \omega_x \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi. \quad (10)$$

Da aber bei feststehendem  $(x, y, z)$ -System

$$\Omega_z = -\frac{d\beta}{dt} \quad (11)$$

gilt, erhält man für den Verlauf des «Einschleppens» die Differentialgleichung

$$\frac{d\beta}{dt} = -\omega_x \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi, \quad (12)$$

deren Lösung für den wiederum praktisch wichtigen Sonderfall einer konstanten Kugelwinkelgeschwindigkeit und eines kleinen Winkels  $\beta$  die einfache Exponentialbeziehung

$$\beta = \beta_0 e^{-\omega_x \operatorname{ctg} \varphi t} \quad (13)$$

liefert. Im übrigen ist es klar, dass bei Abwesenheit einer  $\omega_z$ -Komponente die Gleichgewichtslagen  $\beta = 0$  und  $\beta = \pi$  vorliegen, wobei die erste stabil, die zweite labil ist.

Ein weiterer Fall von praktischer Bedeutung ist, wiederum bei Abwesenheit der  $\omega_z$ -Komponente, durch den Übergang von einem feststehenden auf ein mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_0$  um die  $z$ -Achse rotierendes  $(x, y, z)$ -System gegeben, also durch eine in der  $(x, y)$ -Ebene gleichförmig rotierende Kugeldrehachse. Hier gilt

$$\frac{d\beta}{dt} = \Omega_0 - \omega_x \operatorname{ctg} \varphi \sin \beta, \quad (14)$$

und das Gleichgewicht stellt sich für

$$\beta = \arcsin \left( \frac{\Omega_0}{\omega_x} \operatorname{tg} \varphi \right) \quad (15)$$

ein. Um diesen Winkel bleibt also die homoplane Ebene der Rollendrehachse dauernd hinter der Kugeldrehachse zurück.

Um den Nachweis zu erbringen, dass das dargelegte Schwenkverhalten nicht nur für die bis dahin betrachtete orthogonal angeordnete Schlepprolle, sondern auch für jede andere hierzu homoplane Schlepprolle mit gleicher Schwenkachse gilt, braucht man nur für einen Augenblick anzunehmen, das  $(\xi, \eta, z)$ -System (und mit ihm die homoplane Ebene der Rolle) werde nicht geschwenkt, sondern bleibe raumfest. Dagegen führe die Kugel eine derartige Drehbewegung aus, dass sich zwischen ihr und der Rolle dieselben Relativbewegungen abspielen wie bei dem geschilderten Einschleppvorgang. Alle zur ersten Rolle homoplanen und um die gleiche Schwenkachse schwenkbaren, frei laufenden Rollen haben in diesem transformierten System die Bedeutung einer Anzahl homoplaner, frei laufender fester Rollen. Da eine von ihnen die Kugeldrehung gestattet, gestatten sie auch alle anderen. Damit ist gezeigt, dass diese ganze Rollenfamilie nach Rückkehr in das geschwenkte  $(\xi, \eta, z)$ -System die Schwenkungen der ersten Rolle sperrungsfrei mitmacht und dass – da die Bewegung jeder Schlepprolle durch die Kugeldrehung eindeutig festgelegt ist – das Schwenkverhalten aller betrachteten Rollen gleich dem der ersten Rolle ist. Man kann also die Sätze festhalten:

Das Schwenkverhalten einer Schlepprolle für eine gegebene Kugeldrehung ist eindeutig gegeben durch die Lage ihrer Schwenkachse und ihrer homoplanen Ebene. Es ist unabhängig von der Lage der Rollendrehachse in der homoplanen Ebene sowie von der Lage ihres Berührungspunktes auf dem Schnittkreis ihrer homoplanen Ebene mit der Kugel.

Es können daher die Drehachsen beliebig vieler untereinander homoplaner freilaufender Schlepprollen starr miteinander verbunden um eine gemeinsame Schwenkachse schwenkbar angeordnet werden, ohne einander zu stören.

Für den Fall der Kugeldrehung um eine feststehende Achse erreicht jede beliebige Schlepprolle dann eine Gleichgewichtslage, wenn ihre Drehachse zur Kugeldrehachse homoplan wird.

Nachdem man sich nunmehr über das Verhalten der einzelnen Rollentypen in grossen Zügen Klarheit verschafft hat, ist es keine schwierige Aufgabe mehr, die Rollenkombinationen festzustellen, die zu einer eindeutig bestimmten Kugeldrehung führen. Die folgende Zusammenstellung ist natürlich als Minimal-schema zu betrachten, da darin nur von den *Arbeitsrollen* die Rede ist, die für die eindeutige Bestimmung der Kugeldrehung unbedingt erforderlich sind. Darüber hinaus kann noch eine beliebige Zahl weiterer Rollen an der Kugel anliegen, sofern dadurch keine weitere Einschränkung der Freiheitsgrade der Kugel erfolgt. Dass die Anordnung solcher weiterer *Stützrollen* – wie die vorangehenden Überlegungen zeigen – möglich ist, darf als Glück bezeichnet werden. Denn einerseits genügen zwei bis drei Rollen zur Festlegung der Kugeldrehung,



andererseits sind ihrer mindestens vier erforderlich, um den Kugelmittelpunkt in seiner Lage festzuhalten und für die nötige Anpressung aller beteiligten Rollen zu sorgen.

Die drei Freiheitsgrade der Kugel werden durch folgende Rollenkombinationen vollständig aufgebraucht:

Eine angetriebene Leitrolle und eine hierzu inhomoplane freilaufende Leitrolle.

Eine angetriebene Leitrolle und eine angetriebene Schlepprolle.

Zwei zueinander homoplane angetriebene Leitrollen.

Zwei zueinander inhomoplane freilaufende Leitrollen und eine angetriebene Schlepprolle.

Eine freilaufende Leitrolle und zwei angetriebene Schlepprollen mit verschiedenen Schwenkachsen.

Drei angetriebene Schlepprollen mit verschiedenen Schwenkachsen.

Dass selbst bei unvollständiger Ausnutzung dieser sechs Kombinationsmöglichkeiten eine grosse Anzahl von Problemen gelöst werden kann, soll in den Abschnitten über die Anwendungen dargelegt werden.

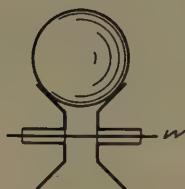
### Theorie des technischen Kugelgetriebes

Wir kommen nun auf die drei Zusatzbedingungen zurück, die wir am Beginn des vorhergehenden Abschnittes zur Definition des idealen Kugelgetriebes formuliert hatten. Es ist offensichtlich, dass an einem praktisch ausgeführten Getriebe weder der erste noch der dritte dieser Zusätze vollkommen verwirklicht werden kann und dass man es in Wirklichkeit stets nur mit mehr oder weniger guten Annäherungen zu tun hat. Zweck der folgenden Überlegungen ist, Kriterien für die Güte dieser Annäherungen ausfindig zu machen und Richtlinien für eine optimale Ausnützung der dabei erworbenen Kenntnisse in der konstruktiven Praxis zu gewinnen.

Am leichtesten ist der dritte Zusatz zu behandeln, der absolute Genauigkeit der vorkommenden homoplanen Beziehungen verlangt. Tatsache ist, dass man einerseits konstruktiv nicht ohne homoplane Rollengruppen oder wenigstens Rollenpaare auskommt, dass andererseits die technische Verwirklichung einer guten Annäherung hohe Anforderungen an die Fabrikationsmethoden stellt und dass schliesslich von dem Augenblick an, wo die Kugeldrehung eindeutig gegeben ist, der Ersatz auch nur eines homoplanen Rollenpaares durch ein leicht inhomoplanes zu einer Überbestimmtheit der Kugeldrehung führt. Diese Drehung kann dann nur noch aufrechterhalten werden, wenn mindestens eine der beteiligten Rollen neben der abrollenden eine gleitende Bewegung auf der Kugelfläche ausführt. Der im zweiten Zusatz geforderte hohe Reibungskoeffizient führt, indem er eine solche gleitende Relativbewegung ausschliesst, zum Blockieren des Getriebes. Praktisch kann sowohl eine Gleitbewegung als auch

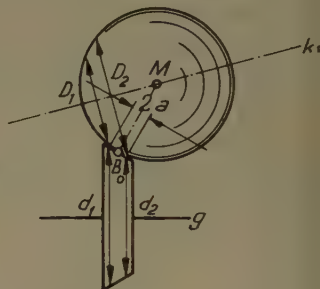
dieses Blockieren auftreten. Man hat also alles Interesse an einer möglichst weitgehenden Verbesserung der homoplanen Beziehungen.

Die Schwierigkeit bei der Verwirklichung ist eine doppelte: Erstens müssen die Achsen der beiden Rollen in eine Ebene gebracht werden; zweitens ist dafür zu sorgen, dass der Kugelmittelpunkt in diese Ebene zu liegen kommt. Hier hilft in vielen Fällen ein einfacher Kniff: Selbstredend liegen die Achsen zweier koaxial angeordneter Rollen von selber «in einer Ebene», und zwar, wenn man sie im Sinne von Figur 3 unabhängig voneinander auf einer gemeinsamen Welle  $W$  lagert, mit der höchsten fabrikatorisch überhaupt erreichbaren Genauigkeit.



Figur 3

Homoplanes Rollenpaar auf gemeinsamer Achse.



Figur 4

Erklärung des mahlenden Abrollens.

Die gemeinsame Achse spannt aber noch gar keine eindeutig bestimmte Ebene auf, so dass sich die gemeinsame homoplane Ebene automatisch und unabhängig von kleinen Abweichungen des Kugelmittelpunktes von seiner Sollage als Verbindungsebene zwischen der Rollenchse und dem Kugelmittelpunkt ergibt. Diese Lösung mit koaxialen Rollen auf gemeinsamer Welle ist also fast vollkommene Annäherung an die idealen Verhältnisse überall dort anzustreben, wo homoplane Rollen nicht zu vermeiden sind.

Wesentlich schwieriger liegen die Verhältnisse beim ersten Zusatz, da der Härte der Materialien naturgemäss Grenzen gesetzt und hohe Anpresskräfte zur Übertragung möglichst grosser Momente meist erwünscht sind. Hier muss man etwas tiefer in die Vorgänge eindringen, die sich in der Berührungsfläche zwischen Rolle und Kugel bei der Übertragung einer Umfangskraft abspielen.

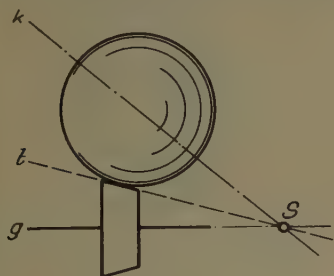
Figur 4 zeigt eine Kugel, die sich um eine Achse  $k$  dreht und auf der einen Rolle abrollt, deren Drehachse durch  $g$  gegeben ist. Die Berührungsfläche stellt sich im gezeichneten homoplanen Schnitt als annähernd gerades Kurvenstück der Länge  $2a$  dar. Auf dieser Berührungsfläche rollt die Kugel mit wirksamen Durchmessern zwischen  $D_1$  und  $D_2$ , die Rolle mit Durchmessern zwischen  $d_1$  und  $d_2$  ab. Man erkennt sofort, dass innerhalb der Berührungsfläche eine Überbestimmtheit der Bewegung und damit ein internes Gleiten auftreten muss.



sofern nicht

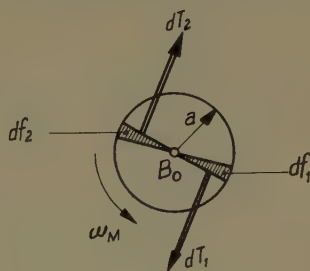
$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{D_2}{d_2} \quad (16)$$

ist. Dies wäre aber nur der Fall, wenn die gemeinsame Tangentialebene  $t$  der beiden Körper durch den Schnittpunkt  $S$  ihrer beiden Drehachsen  $g$  und  $k$  im Sinne von Figur 5 ginge und damit ein Abrollen entstünde, das mit Recht als *ideales Abrollen* bezeichnet werden darf. Dieses ideale Abrollen ist natürlich überall dort, wo es konstruktiv möglich ist, anzuwenden, da es einerseits ein auch in zweiter Näherung eindeutiges Übersetzungsverhältnis zwischen Rolle



Figur 5

Beispiel für ideales Abrollen.



Figur 6

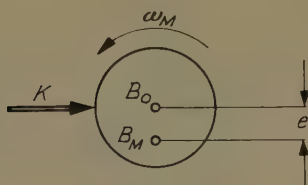
Symmetrien in der Berührungsfläche  
bei kräftefreiem Abrollen.

und Kugel ergibt und andererseits ein Minimum an Leistungsaufwand und Verschleiss sicherstellt. Leider lässt sich dieses Abrollen – da es eine bestimmte Lage der Kugeldrehachse erfordert – nur in gewissen Fällen verwirklichen, und man muss sich daher eingehender mit dem durch internes Gleiten belasteten *mahlenden Abrollen* befassen.

Für eine kleine Drehung könnte man sich auch in Figur 4 ein Abrollen ohne Gleiten vorstellen, nur müsste man zulassen, dass während dieser Drehung eine kleine Verwindung der beiden Achsen  $g$  und  $k$  zueinander entstünde, so dass sie am Ende nicht mehr in einer Ebene lägen. In einer zweiten Bewegungs- etappe könnte diese Verwindung durch eine gegenseitige Schwenkung der beiden Achsen um die Verbindungsgerade  $MB_0$  (wobei  $B_0$  der Mittelpunkt der Berührungsfläche ist) wieder korrigiert werden. Nach dem Überlagerungsprinzip kann man sich also das mahlende Abrollen als Summe eines idealen Abrollens und einer mahlenden Drehbewegung der Berührungsfläche denken.

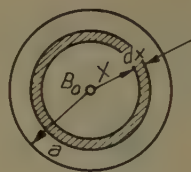
Um die weiteren Überlegungen zu vereinfachen, ist es von Vorteil, für die Rolle eine kugelig bombierte Oberfläche anzunehmen. An den wesentlichen Verhältnissen ändert sich beim Übergang auf zylindrische oder konische Rollen nicht viel, so dass nicht von einer grundsätzlichen Einschränkung gesprochen werden kann. Die Relativbewegung der beiden nunmehr kreisrunden Kontakt-

oberflächen besteht also nach dem bisher Gesagten lediglich in einer Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_M$  um den Mittelpunkt  $B_0$  (Figur 6) als Momentanzentrum. Da es sich aber um einen vollständig rotationssymmetrischen Fall handelt, findet sich zu jedem elementaren Kreissektor  $d\varphi_1$ , der durch seine Reibung eine elementare Tangentialkraft  $dT_1$  in einer bestimmten Richtung liefert, ein symmetrisch gelegener Sektor  $d\varphi_2$ , der eine gleich grosse entgegengesetzt gerichtete Kraft  $dT_2$  abgibt, so dass im Endresultat nur ein Moment um  $MB_0$ , aber keine übertragene Umfangskraft sich einstellt. Eine Kraftübertragung beim mahlenden Abrollen ist also nur möglich, wenn eine Unsymmetrie in der Berührungsfläche auftritt, das heisst, wenn das Mahlen



Figur 7

Verschiebung des Mahlzenters bei Übertragung einer Kraft  $K$ .



Figur 8

Zur Berechnung der Druckverteilung verwendete Grössen.

nicht um  $B_0$ , sondern um ein Mahlzentrum  $B_M$  (Figur 7) als Momentanzentrum erfolgt, das gegenüber  $B_0$  um einen kleinen Betrag  $e$  ausgelenkt ist.  $B_0$  gleiten dann translatorisch mit der Geschwindigkeit  $e\omega_M$ . Die von der gesamten Fläche übertragene Umfangskraft  $K$  ist dann durch Integration aus den elementaren Reibungskräften der Flächenelemente zu ermitteln.

Die Anpresskraft  $P$  entsteht durch eine elliptische Verteilung des Druckes  $p$  in Funktion des Radius  $0 \leq x \leq a$  nach den Beziehungen

$$p = \frac{p_{max}}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (17)$$

und

$$P = 2\pi \int_0^a x p dx, \quad (18)$$

wie dies leicht aus Figur 8 abgelesen werden kann. Die Integration ergibt

$$P = \frac{2}{3} \pi a^2 p_{max} \quad (19)$$

und somit

$$p = \frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (20)$$

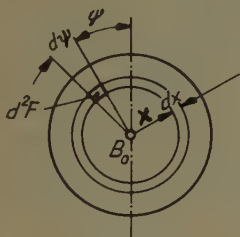


Bei einem Reibungskoeffizienten  $\mu$  erhält man damit für das in Figur 9 dargestellte Flächenelement

$$d^2 F = d\psi \, x \, dx \quad (21)$$

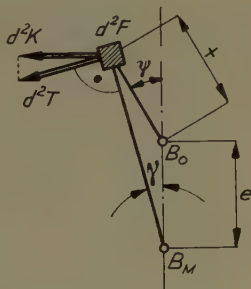
eine Reibungskraft

$$d^2 T = \frac{3 \mu P}{2 \pi a^3} \sqrt{a^2 - x^2} \, x \, dx \, d\psi. \quad (22)$$



Figur 9

Lage des untersuchten Flächenelementes  $d^2 F$ .



Figur 10

Kräfte am Flächenelement  $d^2 F$ .

Man führt hier mit Vorteil die dimensionslose Grösse

$$\xi = \frac{x}{a} \quad (23)$$

ein und schreibt

$$d^2 T = \frac{3 \mu P}{2 \pi} \xi \sqrt{1 - \xi^2} \, d\xi \, d\psi. \quad (24)$$

Das Kräftelement  $d^2 T$  wirkt in der Bewegungsrichtung, also senkrecht zum Radius  $\overline{B_M d^2 F}$  (Figur 10). Aus Symmetriegründen fallen bei der Integration die zu  $B_0 B_M$  parallelen Komponenten aus, so dass nur die dazu senkrechten Komponenten  $d^2 K$  von Interesse sind.

Aus der Figur kann man ablesen, dass

$$d^2 K = d^2 T \cos \gamma \quad (25)$$

ist, wobei sich aus den trigonometrischen Verhältnissen unter Einführung der Grösse

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \quad (26)$$

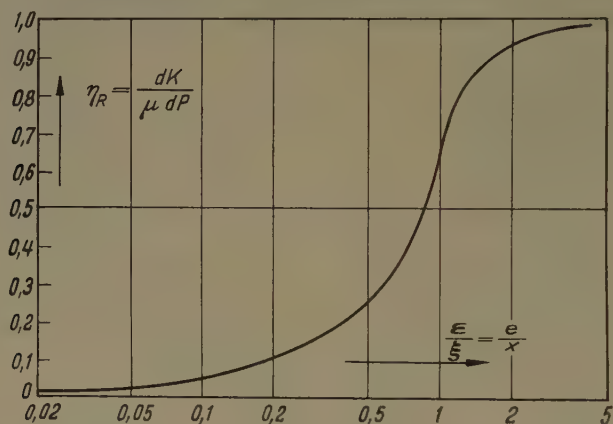
die Beziehung

$$\cos \gamma = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right) + \cos \psi}{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right)^2 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right) \cos \psi + 1}} \quad (27)$$

ergibt. Der «Reibungsgrad»  $\eta_R$  eines Ringes nach Figur 8 ist nun offenbar durch das Verhältnis

$$\eta_R = \frac{\int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} d^2 K}{\int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} d^2 T} = \frac{dK}{dT} = \frac{dK}{\mu dP} = \frac{1}{\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} \cos \gamma d\psi \quad (28)$$

gegeben. Figur 11 zeigt den durch Planimetrieren ermittelten Verlauf von  $\eta_R$ .



Figur 11

Reibungsgrad  $\eta_R$  des Ringes  $dF$  in Funktion der Auslenkung  $e$  des Mahlzentruns.

in Funktion der hier mit Vorteil verwendeten Variablen  $\varepsilon/\xi$ . Damit ergibt sich die übertragene Kraft des Ringes

$$dK = 3 \mu P \eta_R \xi \sqrt{1 - \xi^2} d\xi \quad (29)$$

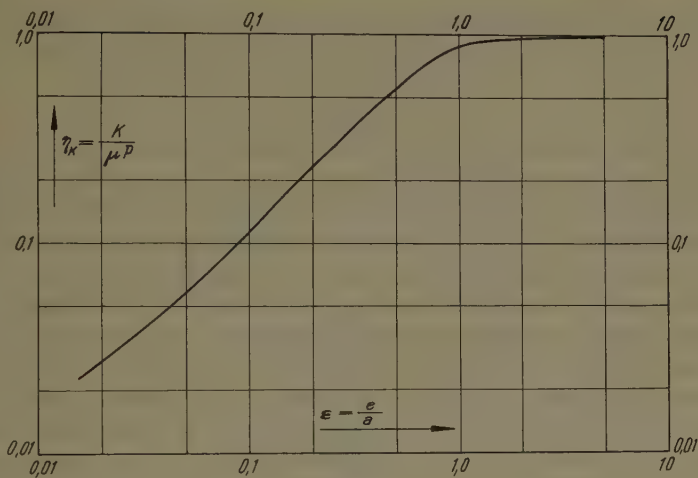
und die Gesamtkraft

$$K = 3 \mu P \int_{\xi=0}^{\xi=1} \eta_R \xi \sqrt{1 - \xi^2} d\xi. \quad (30)$$

Die hierfür charakteristische Grösse  $K/(\mu P)$ , die man als Reibungsgrad  $\eta_K$  der gesamten Berührungsfläche bezeichnen kann, ist offenbar nur von  $\varepsilon$  abhängig. Diese Beziehung ist in Figur 12 dargestellt.

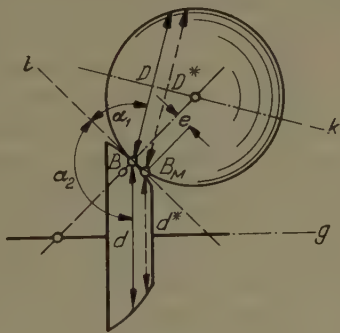
In der Praxis geht man von den vorbekannten Grössen  $K$ ,  $\mu$ ,  $P$  und  $a$  aus; ermittelt  $\eta_K$ , liest den Wert von  $\varepsilon$  in Figur 12 ab und berechnet  $e$  nach der Beziehung (26). In Figur 13 sind mit  $D$  und  $d$  die wirksamen Durchmesser des entsprechenden idealen Getriebes bezeichnet, während  $D^*$  und  $d^*$  die um  $e$  verschobenen effektiv wirksamen Durchmesser sind. Man stellt aus der Abbildung





Figur 12

Reibungsgrad  $\eta_k$  der ganzen Berührungsfläche in Funktion der Auslenkung  $e$  des Mahlzentruns.



Figur 13

Zur Berechnung des Schlupfes verwendete Grössen.

unmittelbar fest, dass

$$D^* = D + e \cos \alpha_1 \tag{31}$$

und

$$d^* = d + e \cos \alpha_2 \tag{32}$$

ist. Daraus lässt sich sofort der Schlupf bestimmen, der den Wert

$$s = \frac{D^* d}{D d^*} - 1 \tag{33}$$

hat. Der Schlupf ist für Genauigkeitsgetriebe (vor allem Rechengetriebe) als

Fehlergrösse von hervorragender Bedeutung. Bei Leistungsgetriebenen interessiert man sich eher für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{d^* D}{d D^*} . \quad (34)$$

Es sind nun noch einige Bemerkungen über die Voraussetzungen der dargestellten Theorie erforderlich, um Fehler bei deren Anwendung tunlichst zu vermeiden. Die angestellten Überlegungen sind richtig für den Fall völlig trockener Reibung und kugelförmig bombierter Rollen. In der Praxis aber wird man es hie und da mit mehr oder weniger öligen bzw. fettigen Oberflächen und sehr oft mit anders geformten Rollen zu tun haben.

Der Einfluss einer schmierenden Oberfläche darf nicht überschätzt werden. Die lokalen Flächenpressungen sind nämlich bei den üblichen Ausführungen meist zu hoch, als dass sich noch ein tragfähiger Schmierfilm erhalten könnte. Nach den Erfahrungen des Verfassers an leicht eingefetteten Kugeln zwischen 50 und 100 mm Durchmesser bei Anpresskräften zwischen 10 und 15 kg und Umfangskräften von etwa 50 g konnten keine nennenswerten Unterschiede gegenüber trockenen Kugeln festgestellt werden. Da es sich dabei um Genauigkeitsgetriebe handelte, wäre ein Schlupf von 0,1% schon als untragbar betrachtet worden.

Ähnlich steht es auch mit den von nicht kreisförmigen Berührungsflächen herrührenden Abweichungen, da diese Flächen meist annähernd die Form einer Ellipse mit nicht sehr stark verschiedenen Achsen aufweisen. Liegt die grosse Achse der Ellipse in der Richtung  $B_0 B_M$ , so kann man für  $a$  die grosse Halbachse einsetzen und wird damit auf der sicheren Seite bleiben. Liegt dagegen die kleine Achse in dieser Richtung, so rechne man mit dem flächengleichen Kreis, der ebenfalls mit Sicherheit ungünstigere Resultate liefert als die Ellipse.

Insgesamt ist festzuhalten, dass diese Berechnungen nicht Arbeitsgrössen, sondern kleine Verlustgrössen liefern, bei denen es in erster Linie auf die Bestimmung der Grössenordnung und der charakteristischen Einflüsse ankommt. Im Rahmen dieser Zweckbestimmung und abgesehen von ganz extrem liegenden Sonderfällen dürfen die durchgeführten Überlegungen als hinreichend wirklichkeitsgetreu bezeichnet werden. Jedenfalls ergab die Durchrechnung eines praktischen Falles eine durchaus befriedigende Übereinstimmung mit empirisch ermittelten Resultaten.

### Anwendungen der Theorie des idealen Kugelgetriebes

Bei der nun folgenden Aufzählung von Anwendungsmöglichkeiten wird in der Reihenfolge vorgegangen, die auch im Abschnitt über die Theorie des idealen Kugelgetriebes gewählt wurde, um die zur Festlegung einer eindeutigen Kugeldrehung erforderlichen Rollenkombinationen einzuteilen. Da bei diesen



Anordnung der innere Aufbau und nicht der äussere Zweck des Getriebes entscheidend ist, soll am Schluss ein zusammenfassender Überblick vom Gesichtspunkt des Verwendungszweckes gegeben werden.

Bei allen Überlegungen sollen wiederum lediglich die *Arbeitsrollen* betrachtet werden, die notwendig sind, um die Kugeldrehung eindeutig festzulegen und die Resultate nach aussen weiterzugeben. Die darüber hinaus zum Festhalten der Kugel in ihrer Lage und zur Anpressung der Arbeitsrollen benötigten *Stützrollen* sollen dagegen unberücksichtigt bleiben. Überall, wo solche Rollen erforderlich sind, kann man sie sich leicht hinzudenken, wenn man sich daran erinnert, dass sie einerseits frei laufend, andererseits entweder mit einer der Arbeitsrollen homoplan oder aber als Schlepprollen angeordnet sein müssen.

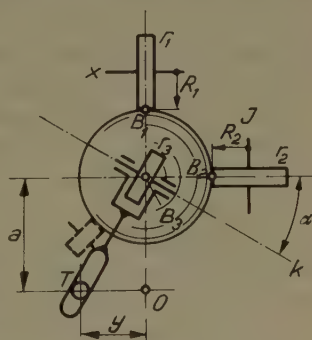
Schliesslich sei noch eine Einschränkung begründet, die eine beträchtliche Kürzung der Zahl der zu untersuchenden Fälle bewirkt: Da der Antrieb schwenkbarer Rollen mit einer von aussen eingegebenen eindeutigen Winkelgeschwindigkeit beträchtliche konstruktive Schwierigkeiten mit sich bringt, wird mit wenigen Ausnahmen auf die Betrachtung angetriebener Steuer- und Schlepprollen verzichtet.

Die Geschichte des echten Kugelgetriebes beginnt (abgesehen vom Kugel-Windkomponentenmesser von H. VENTOSA aus dem Jahre 1881 [1]) mit der Erfindung des *Kugelintegrators* durch HELE SHAW im Jahre 1885 [1]. Es handelt sich dabei um ein Getriebe, bei dem die Drehung der Kugel durch eine angetriebene feste Rolle  $r_1$  und eine frei laufende und um die zur homoplanen Ebene von  $r_1$  senkrechte Achse schwenkbare Steuerrolle  $r_3$  festgelegt wird (siehe Figur 14). Bei der orthogonalen Lage der beiden Berührungspunkte sind die homoplanen Ebenen dieser beiden Rollen stets senkrecht zueinander, und die Kugeldrehachse  $k$  liegt nicht nur homoplan, sondern auch parallel zur Drehachse von  $r_3$ . Das Resultat wird durch die frei laufende, zu  $r_1$  homoplane feste Rolle  $r_2$  entnommen, deren Berührungspunkt  $B_2$  zu den Berührungspunkten der beiden anderen Rollen wiederum orthogonal liegt. Durch sinngemässe Anwendung der Gleichung (1) erkennt man, dass die Umfangsgeschwindigkeit  $V_{B_1}$  am Berührungspunkt  $B_1$  der Kugel eine Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{V_{B_1}}{R \cos \alpha} \quad (35)$$

und somit dem Berührungspunkt  $B_2$  eine Umfangsgeschwindigkeit

$$V_{B_2} = R \omega \sin \alpha = V_{B_1} \operatorname{tg} \alpha \quad (36)$$



Figur 14

Schema des Kugelintegrators.

aufzwingt. Nimmt man für  $r_1$  und  $r_2$  die Radien  $R_1$  und  $R_2$  an, so wird  $r_2$  bei einer elementaren Drehung  $dx$  der Rolle  $r_1$  die Drehung

$$dJ = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{tg} \alpha \, dx \quad (37)$$

ausführen. Steuert man nun die Steuerrolle  $r_3$  mit Hilfe der in Figur 14 dargestellten sogenannten *Tangentenmechanik*, die das rechtwinklige Dreieck  $OB_3T$  mit der veränderlichen Kathete  $y$  realisiert, so erhält man nach Integration beider Seiten

$$J = \frac{R_1}{a R_2} \int y \, dx. \quad (38)$$

Man hat also ein *Getriebe*, das zur Ausführung von Integrationen geeignet ist, das naturgemäss aber auch als *stufenloses Leistungsgetriebe* Verwendung finden kann. Der Vorteil dieses Getriebes gegenüber anderen stufenlosen Getrieben liegt darin, dass für eine Änderung des Übersetzungsverhältnisses lediglich eine Schwenkung der Steuerrolle erforderlich ist, also eine Bewegung, die mit einem Minimum an Kraftaufwand und ganz unabhängig von der Drehung der Antriebsrolle  $r_1$  ohne Gleiten einer der Rollen auf der Kugel durchführbar ist. Man kann also die Rollen, ohne einen übermässigen Verschleiss bei häufigem oder andauerndem Verstellen des Übersetzungsverhältnisses befürchten zu müssen, kräftig an die Kugel drücken und erhält auch bei schnell schwankendem Integranden ein annähernd schlupffreies Abrollen und damit eine genaue Integration.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass durch Antrieb von  $r_2$  und Entnahme des Resultates bei  $r_1$  die gelegentlich benötigte *inverse Integration* von Integralen der allgemeinen Form  $\int (1/y) \, dx$  möglich ist (Angaben hierüber sind unter [2] zu finden).

Angesichts der Bedeutung des Kugelintegrators sind hier einige historische Bemerkungen am Platze. Bald nach seiner Erfindung wurde er durch J. und A. AMSLER für die laufende Berechnung der Arbeit von Traktionsfahrzeugen und andere ähnliche Zwecke eingeführt [3], [4], [5], [6]. In der Zwischenzeit entstand der *Harmonische Analysator* von CORADI, an dem ebenfalls das System des Kugelgetriebes angewendet wurde [7], [8]. Als *Leistungs- und Regelgetriebe* wurde der Kugelintegrator vor einigen Jahren durch die Firma *Contraves AG.* entwickelt, wobei allerdings aus konstruktiven Gründen von der klassischen orthogonalen Anordnung mit Zylinderrollen bereits abgegangen wurde [9]. In der letzten Zeit wurden durch die Firma *A. J. Amsler & Co.* mehrere neue Varianten für die Verwendung an Rechenmaschinen hoher Präzision geschaffen. Da hier erstmals die Theorie des technischen Kugelgetriebes eine praktische Konsequenz zeitigte, wird von diesen Entwicklungen im nächsten Abschnitt noch die Rede sein. Daneben entstand der *Kugelintegrator*, ein Gerät, das beim Verfolgen einer beliebigen gezeichneten Kurve  $f(x)$  mit dem in Figur 15 unten

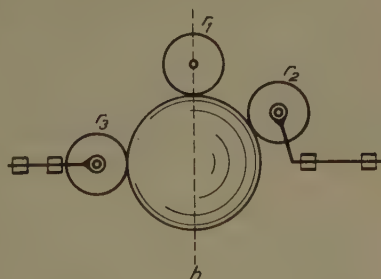


Figur 15

Amsler-Kugelintegrgraph. Unten der Farbstift, der der Originalkurve nachgeführt wird; oben die Registrierfeder, die die Integralkurve aufzeichnet.

sichtbaren Fahrstift automatisch die Integralkurve  $\int f(x) dx$  registriert [10], [11], [12], [13]. Eine Besonderheit dieses Instrumentes besteht darin, dass die Antriebsrolle fehlt und der Antrieb nach der unabhängig Veränderlichen durch unmittelbares Abrollen der Kugel auf dem Führungslineal erzielt wird.

Die Möglichkeiten des Getriebes, bei dem die Kugeldrehung durch zwei inhomoplane Leitrollen – wovon eine angetrieben – festgelegt wird, sind aber mit dem Kugelintegrator durchaus nicht erschöpft. Man kann die Bewegung der Kugel auch im Sinne von Figur 16 mit Hilfe einer Schlepprolle  $r_2$  entnehmen, deren Schwenkachse mit derjenigen der Steuerrolle  $r_3$  identisch ist. Der Antrieb erfolgt wieder durch die feste Rolle  $r_1$ . Wiederum liegt die Kugeldrehachse in der homoplanen Ebene  $h$  von  $r_1$  und ist homoplan bzw. parallel zu  $r_3$ . Die Schlepprolle hat nun, wie wir gesehen



Figur 16

Schema der Kugel-Nachlaufsteuerung, des Schwingungsfilters und des Schlepprolldifferentiators.

haben, das Bestreben, sich zur Kugeldrehachse homoplan einzustellen. Sie folgt also allen Schwenkungen der Steuerrolle nach. Da die Steuerrolle mit einem minimalen Drehmoment geschwenkt werden kann, an der Schwenkachse der Schlepprolle hingegen schon recht beträchtliche Drehmomente entnommen



werden können, verfügt man hier über eine mechanische *Nachlaufsteuerung* von kaum zu übertreffender Einfachheit und Zuverlässigkeit. Besonders angenehm für die Eigenschaften dieser Nachlaufsteuerung ist die Tatsache, dass die für das Einschleppen der Schlepprolle massgebende Differentialgleichung (12) nur ersten Grades ist, so dass eine Neigung zum Pendeln völlig ausgeschlossen ist. Versuche des Verfassers haben denn auch ergeben, dass die Schlepprolle bei geeigneter Konstruktion und Wahl der Antriebsdrehzahl selbst den unregelmässigsten ruckweisen Schwenkungen verblüffend getreu folgt und nachher augenblicklich zum Stillstand kommt, wobei eine Drehmomentverstärkung von etwa einer Zehnerpotenz in einer Stufe ohne Schwierigkeiten erreicht und bei Verwendung mehrerer zueinander homoplaner Schlepprollen auf gemeinsamer Schwenkachse auch überschritten werden kann.

In der oben beschriebenen einfachsten Form mit angetriebener fester Rolle eignet sich diese Nachlaufsteuerung naturgemäss nur für Schwenkungen in einem Bereich von etwa  $120^\circ$ , da darüber hinaus die Winkelgeschwindigkeit der Kugeldrehung rapid zunimmt. Eine *Nachlaufsteuerung für mehrere volle Umdrehungen* ist durch Antrieb der Steuerrolle, eventuell auch der Schlepprolle, denkbar, wobei allerdings auf eine möglichst reaktionsmomentfreie Anordnung der Antriebsorgane zu achten ist. Dies ist aber eine konstruktive Frage, die nicht in den Rahmen der vorliegenden Arbeit gehört. Im übrigen gelten hier die eingangs erwähnten Schwierigkeiten bezüglich angetriebener schwenkbarer Rollen nur teilweise, da im gegebenen Fall wenigstens die genaue Einhaltung der Winkelgeschwindigkeit der angetriebenen Rolle unwesentlich ist.

Das soeben beschriebene Getriebe kann aber noch für zwei weitere Zwecke verwendet werden. Wir haben gesehen, dass die Schlepprolle in ihrer Schwenkung stets um einen gewissen Betrag hinter der Kugeldrehachse und somit auch hinter der hiezu homoplanen Steuerrolle zurückbleibt. Führt nun die Steuerrolle statt der in Gleichung (15) berücksichtigten Drehschwenkung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit eine oszillierende Schwenkung

$$\alpha_3 = A_3 \sin(\epsilon t) \quad (39)$$

aus, so wird der Schwenkwinkel  $\alpha_2$  der Schlepprolle bei sinngemässer Anwendung der Gleichung (12) durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -\omega_1 \operatorname{ctg} \varphi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \quad (40)$$

bestimmt, die für  $t \rightarrow \infty$ , also nach dem Einschleppen aus einer beliebigen Anfangsstellung, und für kleine Werte von  $(\alpha_2 - \alpha_3)$  und somit  $A_3$  mit dem Lösungsansatz

$$\alpha_2 \cong A_2 \sin(\epsilon t + \tau) \quad (41)$$

die Amplitude

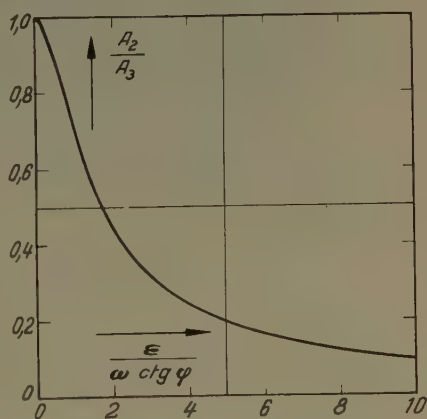
$$A_2 \cong A_3 \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_1^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}} \quad (42)$$

und die Phasenkonstante

$$\tau \cong \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_1^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}} \quad (43)$$

liefert. Aus der Beziehung (42) ersieht man unmittelbar die Eignung des Getriebes als *Schwingungs-Tiefpass-Filter*. In Figur 17 ist das Amplitudenverhältnis  $A_2/A_3$  in Funktion der entscheidenden Grösse, nämlich des Verhältnisses  $\varepsilon/(\omega_1 \operatorname{ctg} \varphi)$ , dargestellt. Durch geeignete Wahl der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  und des Schleppwinkels  $\varphi$  kann der Übergang von wiedergegebenen zu unterdrückten Schwingungen an jede beliebige Stelle des in Betracht kommenden Frequenzbereiches verlegt werden. Wie man sich auf Grund einfacher Superpositionsüberlegungen leicht überzeugen kann, erfolgt die Filtrierung stets derart, dass der Mittelwert des Resultates mit dem Mittelwert der filtrierten Schwingung identisch ist. Überall dort, wo man aus irgendwelchen Gründen genötigt ist, Messungen auszuwerten, die durch überlagerte hochfrequente parasitäre Schwingungen unübersichtlich geworden sind, bietet sich also hier ein Mittel, die interessierende niederfrequente Hauptgrösse weitgehend unverzerrt von diesen Überlagerungen zu trennen. Dass sich damit gewisse Möglichkeiten der mechanischen *Schwingungsanalyse* ergeben, sei zunächst nur am Rande vermerkt. Desgleichen sei erwähnt, dass die Einschränkung der Gültigkeit der abgeleiteten Beziehungen, die aus der Gleichsetzung des Sinus mit dem Winkel in Gleichung (40) resultiert, bei geeigneter Konstruktion kein ernstliches Hindernis für die einwandfreie Filtrierung darstellt.

Die letzte Anwendungsmöglichkeit dieses vielseitigen Getriebes ist aus Gleichung (15) direkt zu entnehmen: Da der Term  $\operatorname{tg} \varphi$  konstant ist, ist der Differenzwinkel  $\beta$  zwischen den Stellungen der Steuer- und der Schlepprolle ein Mass für das Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten  $\Omega_0$  und  $\omega_x$  oder, mit andern Worten, für den Differentialquotienten des Schwenkwinkels der

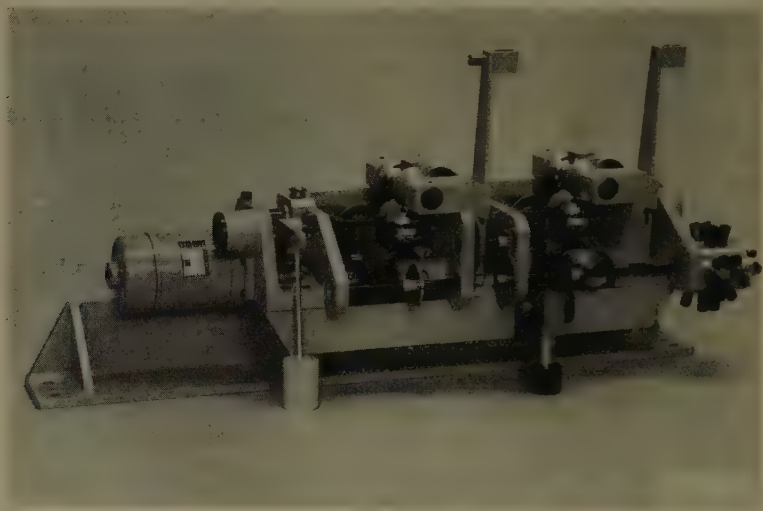


Figur 17

Charakteristik des Kugel-Schwingungsfilters.

Steuerrolle nach dem Drehwinkel der Kugel (bzw., bei kleinen Schwenkwinkeln oder bei angetriebener Steuerrolle: nach dem Drehwinkel der angetriebenen Rolle). Man besitzt damit bereits eine erste Form eines *Derivationsgetriebes*, den sogenannten *Schlepprollendifferentiator*.

Figur 18 zeigt eine interessante Anwendung des beschriebenen Getriebes für einen Amsler-Oberbaumesswagen. Es handelte sich darum, die von einem



Figur 18

Aus Nachlaufsteuerung und Schlepprollendifferentiators kombinierte Einheit für die Überhöhungs- und Verwindungsmessung eines Amsler-Oberbaumesswagens.

künstlichen Kreiselhorizont gemessene Überhöhung der untersuchten Gleisstrecke (das heisst den Höhenunterschied zwischen der bogenäusseren und der bogeninneren Schiene) zu registrieren und daraus die Verwindung (das heisst die Ableitung der Überhöhung nach der Strecke) zu berechnen. Da der verwendete Kreisel nur sehr bescheidene Drehmomente ohne Störung seiner Gleichgewichtslage abgibt, wird die Überhöhung (die durch die vertikale Stossstange vorne links in den Apparat eingeführt wird) in einer ersten Getriebestufe (Kugel links) verstärkt. Die zweite Stufe (Kugel rechts) dient zur Bildung des Differentialquotienten. Die Resultatgrössen werden an den beiden vertikalen Hebeln abgegriffen. Beide Stufen werden durch den synchron ferngesteuerten Motor links aussen proportional zu der vom Wagen zurückgelegten Strecke angetrieben und gleichen sich in ihrem Aufbau vollständig; nur erfolgt der Antrieb der ersten Stufe mit einer hohen, derjenige der zweiten mit einer niedrigen Übersetzung, so dass diese als Derivationsgetriebe, jene aber als Nachlaufsteuerung arbeitet. Das hier angewandte System bewährte sich einwandfrei und



erwies sich eindeutig als Fortschritt gegenüber älteren Mitteln zur Erzielung desselben Resultates.

Fixiert man die Kugeldrehung durch zwei zueinander homoplane, angetriebene feste Rollen, so liegt es nahe, zu untersuchen, wie sich eine dritte feste Rolle verhält, die naturgemäss frei laufend und zu den beiden anderen homoplan angeordnet sein muss. Mit den in Figur 19 angegebenen Bezeichnungen erhält man, ausgehend von einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Kugel um die Achse  $k$ , und unter Berücksichtigung der Beziehung (1) für die Umfangsgeschwindigkeiten der Berührungspunkte  $B_i$  die Werte

$$V_{B_1} = R \omega \sin \alpha, \quad (44)$$

$$V_{B_2} = R \omega \sin (\alpha + \beta), \quad (45)$$

$$V_{B_3} = R \omega \sin (\alpha + \gamma). \quad (46)$$

Nimmt man nun an,  $V_{B_2}$  und  $V_{B_3}$  seien durch Antrieb der Rollen  $r_2$  und  $r_3$  gegeben, so ergibt sich die Umfangsgeschwindigkeit im Berührungspunkt der frei laufenden Rolle durch Eliminieren von  $\alpha$ ,  $R$  und  $\omega$  zu

$$V_{B_1} = \frac{V_{B_2} \sin \gamma - V_{B_3} \sin \beta}{\sin (\gamma - \beta)}. \quad (47)$$

Man verfügt somit über ein *Summationsgetriebe*, bei dem man sich durch geeignete Wahl der Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  in weiten Grenzen den gegebenen Maßstäben der Summanden  $V_{B_2}$  und  $V_{B_3}$  sowie dem gewünschten Maßstab des Resultates  $V_{B_1}$  anpassen kann. Besonders wichtig sind hier natürlich die beiden symmetrischen Fälle, die durch  $\gamma = -\beta$  und  $\gamma = 2\beta$  gekennzeichnet sind und

$$V_{B_1} = \frac{V_{B_2} + V_{B_3}}{2 \cos \beta} \quad (48)$$

beziehungsweise

$$V_{B_1} = V_{B_2} 2 \cos \beta - V_{B_3} \quad (49)$$

liefern. Für den Sonderfall von drei um je  $120^\circ$  auseinanderliegenden Berührungspunkten gilt offenbar

$$V_{B_1} = -(V_{B_2} + V_{B_3}). \quad (50)$$

Die zweite wesentliche Frage bei Festlegung der Kugeldrehung durch zwei homoplane angetriebene feste Rollen ist die nach dem Verhalten einer Schlepprolle in einem solchen Fall. Und zwar interessiert vor allem die orthogonale Anordnung, bei der die beiden Berührungspunkte  $B_1$  und  $B_2$  auf der Kugel einen rechten Winkel einschliessen und die Schwenkachse der Schlepprolle senkrecht zur homoplanen Ebene der beiden angetriebenen Rollen steht (siehe

Figur 20). Aus (1) ergibt sich für diesen Fall

$$\alpha = \arctg \frac{V_{B_2}}{V_{B_1}}; \quad (51)$$

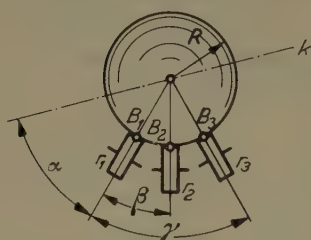
somit liest man bei konstanten Umfangsgeschwindigkeiten der Berührungspunkte nach dem Einschleppen an der in Figur 20 angedeuteten Tangentenmechanik den Ausschlag

$$y = a \operatorname{tg} \alpha = a \frac{V_{B_2}}{V_{B_1}} \quad (52)$$

ab. Führt man die elementaren Drehwinkel  $dx_1$  und  $dx_2$  und die Radien  $R_1$  und  $R_2$  für die beiden angetriebenen Rollen ein, so erhält man

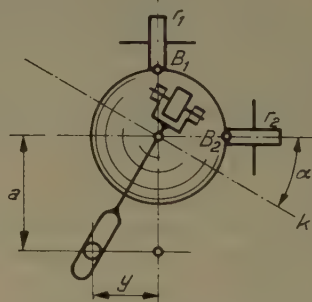
$$y = a \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{dx_2}{dx_1}. \quad (53)$$

Damit hat man ein zweites *Derivationsgetriebe*, den *Kugeldifferentiator*, der um die Jahrhundertwende von A. und J. AMSLER als Komplement zum Kugelintegrator erfunden wurde und in stetig weiterentwickelter Form bis heute zur Standardausrüstung der Amslerschen Dynamometerwagen gehört [3], [4], [14], [15]. Eine moderne Ausführung, wie sie für Triebwagen- und Traktorenprüfstände Verwendung findet, ist in Figur 21 dargestellt [10], [11], [12].



Figur 19

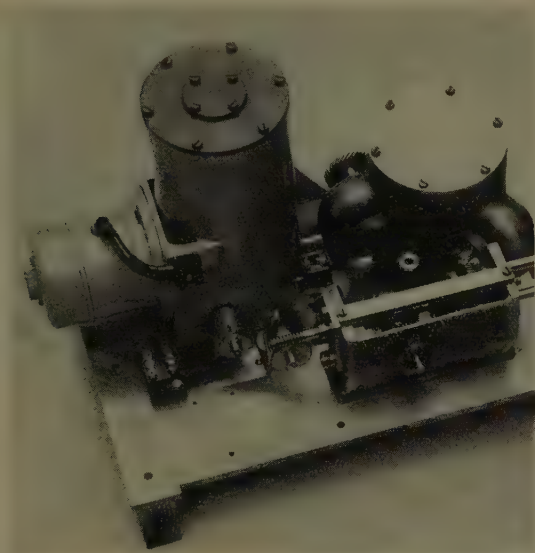
Schema des Kugelsummissionsgetriebes.



Figur 20

Schema des Kugeldifferentiators.

Es ist eine reizvolle Aufgabe, die Eigenschaften dieses Kugeldifferentiators mit denen des weiter oben beschriebenen Schlepprollendifferentiators zu vergleichen (diese beiden Bezeichnungen haben sich, obwohl sie gewiss nicht besonders treffend sind, eingebürgert und mögen daher beibehalten werden). Der Kugeldifferentiator ist überall dort im Vorteil, wo die beiden Eingangsgrößen in etwa gleichwertiger Form durch eine Vielzahl von Wellendrehungen dargestellt werden können, da beim Schlepprollendifferentiators in diesem Fall der Antrieb der Steuer- oder der Schlepprolle erforderlich wäre. Ausserdem muss

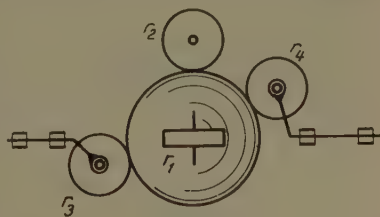


Figur 21

Kugeldifferentiator als Geschwindigkeitsmesser für einen Amsler-Traktorenprüfstand. Rechts hinten der Differentiator, vorne Schaltgetriebe zur Wahl verschiedener Messbereiche, links Motor und Fliehkraftregler zur Lieferung einer konstanten Drehzahl.

hier zur Ermittlung des Resultates stets zunächst eine Winkeldifferenz abgegriffen werden, während beim Kugeldifferentiator die einfache Tangentenmechanik genügt. Dagegen hat der Schlepprollendifferentiators den Vorteil, dass die abzuleitende Grösse nur als Steuerrollenschwenkung, also mit einem Minimum an Drehmoment eingeführt wird, was bei direkter Auswertung an Messgeräten häufig von Bedeutung ist. So wäre die in Figur 18 dargestellte einfache Nachlaufsteuerung beispielsweise nicht in der Lage, einen Kugeldifferentiator anzutreiben.

Aus einer Kombination dieser beiden Derivationsgetriebe im Sinne von Figur 22 ist es übrigens auch möglich, ein *Getriebe zur Bestimmung der ersten und zweiten Ableitung* der einen Eingangsgrösse nach der anderen zu konstruieren. Auf die mathematischen Zusammenhänge braucht hier wohl nicht mehr im einzelnen eingegangen zu werden. Es sei nur angedeutet, dass die Eingangsgrössen  $x_1$  und  $x_2$  als Drehungen der festen Rollen  $r_1$  und  $r_2$  ankommen, so dass die erste Ableitung  $dx_1/dx_2$  aus dem Schwenkwinkel der



Figur 22

Schema des Differentiators zur Bestimmung der ersten und zweiten Ableitung.



beiden Schlepprollen  $r_3$  und  $r_4$  ermittelt werden kann. Da aber die Schleppwinkel dieser beiden Schlepprollen verschieden gross sind, folgen sie den Schwenkungen der Kugeldrehachse, die durch Änderungen des Verhältnisses zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der beiden festen Rollen bedingt sind, verschieden schnell. Der Winkel zwischen den Richtungen der beiden Schlepprollen gibt also – natürlich unter Berücksichtigung der mitspielenden Winkelunktionen – ein Mass für die zweite Ableitung  $d^2x_1/dx_2^2$ . Diese Möglichkeit wurde bisher erst einmal an einem echten Kugelgetriebe ausgenützt, und zwar handelte es sich um ein Gerät für gewisse militärische Zwecke, das wiederum von der Firma *A. J. Amsler & Co.* verwirklicht wurde.

Wir sind damit am Ende unserer Aufzählung angelangt und können uns dem zusammenfassenden Überblick nach dem Gesichtspunkt des Verwendungszweckes zuwenden. Bisher liegen folgende Anwendungen vor:

*Rechengetriebe:* Additionsgetriebe, Integrationsgetriebe, Inverse Integrationsgetriebe, Derivationsgetriebe für die erste Ableitung, Derivationsgetriebe für die zweite Ableitung;

*Schwingungsfilter;*

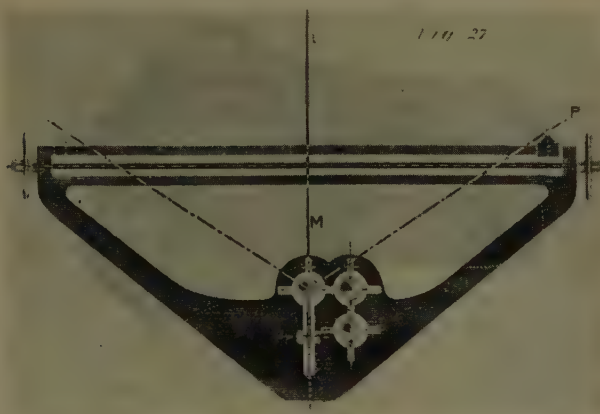
*Nachlaufsteuerungen;*

*Stufenlos regelbare Leistungsetriebe.*

Wie man sieht, liegt das Schwergewicht schon zahlenmässig bei den *Rechengetrieben*, die durch Kombination mehrerer Einheiten zu mehrstufigen Getrieben bzw. zu Rechenanlagen einen sehr weiten Aufgabenkreis zu bewältigen in der Lage sind. Eine vollständige Aufzählung der damit verbundenen Möglichkeiten würde weit über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinausführen. Eine Anzahl von Anwendungen für Integratoren und Differentiatoren ist in der Literatur zu finden [3] bis [6], [10] bis [13], [15] bis [19]. Es sei hier nur auf einige interessante Spezialfälle hingewiesen, die als Anregung zum Auffinden ähnlich gelagerter Fälle dienen und das Gesamtbild in gewisser Hinsicht abrunden dürften.

Schon HELE SHAW wies in seiner klassischen Schrift über den Kugelintegrator auf die Möglichkeit hin, durch Serienschaltung von  $n$  Integratoren *Flächenmomente* der Form  $\int y^n dx$  zu berechnen [1]. Sein Originalentwurf ist in Figur 23 wiedergegeben. Er ist dadurch interessant, dass er die spezifische Eigenschaft des Kugelintegrators, nämlich die Fähigkeit zur Übertragung bedeutender Drehmomente ohne nennenswerten Schlupf, ausnützt, indem das Integral jeder Stufe als unabhängig Veränderliche – also als Antrieb – in die nächste Stufe eingeht. Im übrigen bedarf die Darstellung des auch heute noch modern wirkenden Gerätes wohl keiner besonderen Erklärung. Durch Trennung der Steuerungen der einzelnen Steuerrollen ist der Übergang zu allgemeinen *Stiltjes-Integralen* der Form  $\int f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx$  möglich.

Die Lücke, die durch die Abwesenheit eines *Multipliziergetriebes* unter den einstufigen Getrieben klafft, ist damit wenigstens für die Integrale von Pro-



Figur 23

Integrator zur Messung von Flächen  $F$ , statischen Momenten  $M$  und Trägheitsmomenten  $J$   
(nach der Originaldarstellung von HELE SHAW aus dem Jahre 1885).

$$F = \int y \, dx; \quad M = 1/2 \int y^2 \, dx = 1/2 \int y \, dF; \quad J = 1/3 \int y^3 \, dx = 2/3 \int y \, dM.$$

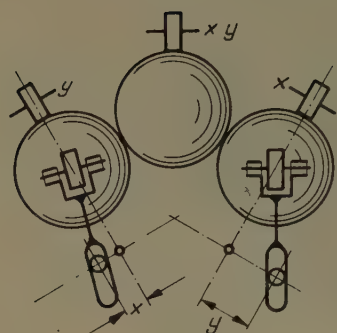
dukten geschlossen. Gewiss kann der Kugelintegrator durch sukzessives Eingeben der Faktoren (zuerst Einstellung der Steuerrolle, dann Drehen der Antriebsrolle) für Multiplikationen verwendet werden; bei Analogierechengern interessiert aber vor allem die Möglichkeit einer Simultanmultiplikation zweier variabler Grössen. Dieses Ziel kann aber ohne Schwierigkeiten durch kombinierte Getriebe erreicht werden. Figur 24 zeigt ein Gerät, das aus zwei Integratoren und einem Summationsgetriebe besteht und die Multiplikation nach dem Prinzip der partiellen Integration, also nach der Beziehung

$$x \, y = \int x \, dy + \int y \, dx \quad (54)$$

durchführt. Dagegen setzt sich das Getriebe in Figur 25 aus zwei Integratoren und einem Differentiator zusammen und arbeitet nach der Formel

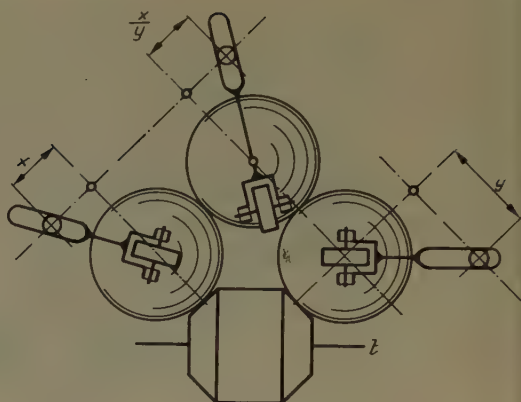
$$\frac{x}{y} = \frac{d(\int x \, dt)}{d(\int y \, dt)} \quad (55)$$

Der Übergang von der Multiplikation zur Division und umgekehrt kann stets unschwer dadurch bewirkt werden, dass man einen der Integratoren invers arbeiten lässt. Das erste der beiden soeben beschriebenen Multiplikationsgetriebe liefert das Produkt als Umdrehungszahl einer Welle, was häufig einen Vorteil darstellt; dafür müssen aber auch die Faktoren als Drehungen von Wellen ankommen. Für lang dauernde Rechnungen mit stark schwankenden Faktoren ist das zweite Getriebe im Vorteil, da Fehler in der Justierung der Integratoren



Figur 24

Kugelmultiplikator nach dem Prinzip der partiellen Integration.



Figur 25

Kugelmultiplikator nach dem Prinzip der Differentiation zweier Integrale.

hier nicht zum sogenannten «Ablaufen», also zu dauernden, mit der Zeit stets zunehmenden Fehlern des Resultates führen können.

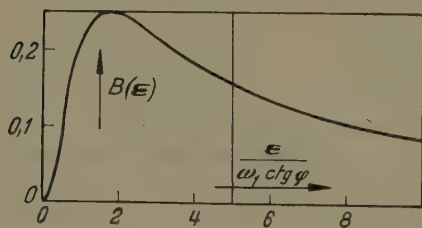
Die Möglichkeit der Verwendung eines Kugel-Schwingungsfilters zur Frequenzanalyse beruht auf der Tatsache, dass die aus Gleichung (42) unschwer zu ermittelnde Funktion

$$B(\varepsilon) = \frac{A_2}{A_3} \left(1 - \frac{A_2}{A_3}\right) \cong \frac{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_1^2} \operatorname{ctg}^2 \varphi} - 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_1^2} \operatorname{ctg}^2 \varphi} \quad (56)$$

den in Figur 26 wiedergegebenen Verlauf mit einer «Resonanzfrequenz» bei

$$\varepsilon_r = \omega_1 \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{3} \quad (57)$$

aufweist. Auf Einzelheiten einer auf dieser Basis beruhenden Frequenzanalyse kann hier nicht eingegangen werden. Es sei nur erwähnt, dass ein gegebenes



Figur 26

Charakteristik des Kugel-Schwingungsfilters, transformiert für Verwendung als Frequenzanalysator.

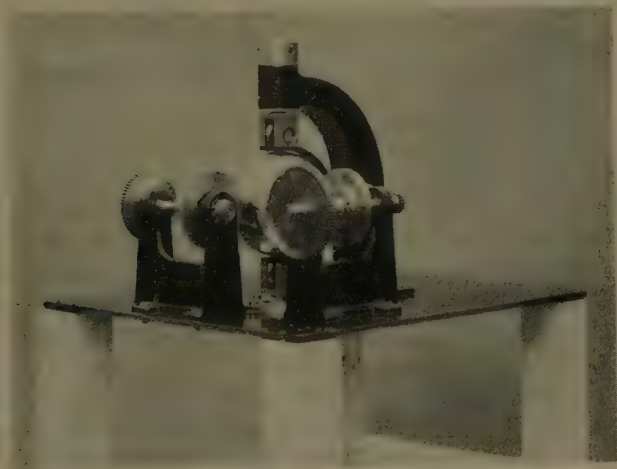
Frequenzspektrum durch Variation von  $\omega_1$  oder  $\varphi$  abgetastet werden kann und dass sich angesichts des Verlaufes von  $B$  (die Glockenkurve von Figur 26 wird annähernd symmetrisch, wenn man einen logarithmischen Abszissenmaßstab wählt!) eine Abstufung der Resonanzfrequenzen nach einer geometrischen (und nicht, wie bei der harmonischen Analyse, nach einer arithmetischen) Reihe empfiehlt.



Über *Nachlaufsteuerungen* und *Leistungsgetriebe* braucht an dieser Stelle nichts weiter gesagt zu werden. Es sei höchstens erwähnt, dass beide Getriebearten nicht nur als unabhängige Elemente, sondern vor allem auch in Verbindung mit Rechengetrieben verwendet werden können, wobei insbesondere das weite Gebiet der *Regeltechnik* eine Reihe noch unausgeschöpfter Möglichkeiten bieten dürfte.

### Anwendungsbeispiel für die Theorie des technischen Kugelgetriebes

Die Grundkonzeption des *klassischen Kugelintegrators* (siehe Figuren 14 und 27) bewährte sich so ausgezeichnet, dass sich die Entwicklung während eines guten halben Jahrhunderts auf Verbesserung konstruktiver Einzelheiten beschränken konnte. Einige kleine Nachteile waren zwar bekannt, wurden aber in Kauf genommen. Dies geschah vorab, weil man sich damals über den Einfluss tiefgreifender konstruktiver Änderungen nur durch grossangelegte Versuche Rechenschaft hätte ablegen können, was auf einem verhältnismässig

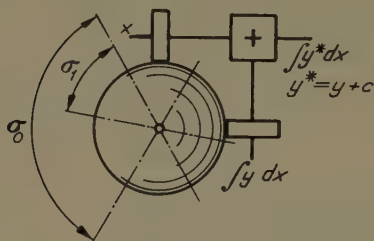


Figur 27

Kugelintegrator in klassischer Ausführung.

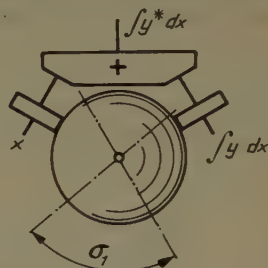
kleinen Spezialgebiet finanziell nicht zu verantworten gewesen wäre. Erst die Theorie des technischen Kugelgetriebes bot dem Konstrukteur ein Mittel, womit er sich auf rechnerischem Wege einen Überblick über die Eigenschaften verschiedener Anordnungen verschaffen konnte. Ohne dieses Hilfsmittel wäre die unten gezeigte Konstruktion nicht entstanden. Auf diese Tatsache muss angesichts des Umstandes, dass die durchgeführten Berechnungen wegen ihres Umfanges hier nicht wiedergegeben werden können, mit besonderem Nachdruck hingewiesen werden.

Ein erster Nachteil der klassischen Anordnung liegt darin begründet, dass die Kugeldrehachse für  $\alpha = 0$  bzw.  $y = 0$  in Gleichung (38) durch den Berührungspunkt der Abtriebsrolle geht. Man erhält damit eine rein mahlende Berührung zwischen der laufenden Kugel und der stillstehenden Rolle, was zu einem stark erhöhten Verschleiss der Oberflächen und gleichzeitig zu schlechter Genauigkeit führt. Diesen Nachteil kann man dadurch beseitigen, dass man im Sinne von Figur 28 ein Differentialgetriebe zwischen die Antriebs- und die Abtriebsrolle schaltet und den Nullpunkt des Integranden um einen konstanten Betrag  $c$  korrigiert. Will man jeden Durchgang des Kugeldrehachse durch den



Figur 28

Erster Schritt: Ausschaltung der Verschleißstelle im Nullpunkt.



Figur 29

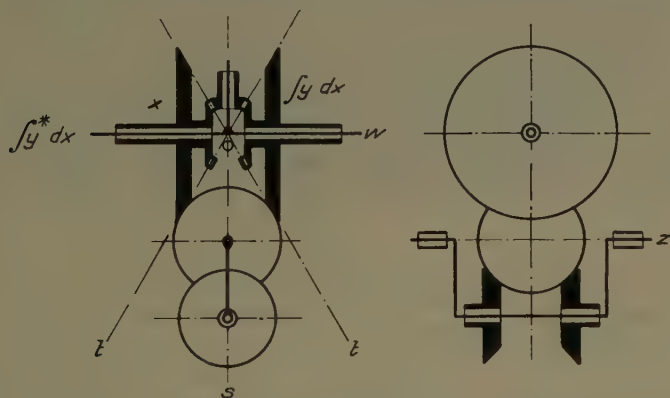
Zweiter Schritt: Vergrößerung des nutzbaren Schwenkwinkels.

Berührungspunkt der Abtriebsrolle vermeiden, so ist man allerdings gezwungen, mehr als die Hälfte des ursprünglich verfügbaren Schwenkwinkels  $\sigma_0$  der Kugeldrehachse zu opfern. Die Abnutzung wird zwar verringert, die Genauigkeit aber verschlechtert. Glücklicherweise ist es jedoch möglich, durch Vergrößerung des Winkels zwischen den Berührungspunkten der beiden Rollen den verfügbaren Schwenkwinkel  $\sigma_1$  wieder wesentlich zu vergrößern, wie dies Figur 29 zeigt. Dabei treten allerdings etwas kompliziertere trigonometrische Verhältnisse auf als im orthogonalen Fall, der den Beziehungen (36) bis (38) zugrunde liegt. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, dass man auch hier mit einer einfachen Tangentenmechanik auskommt. (Diese Tatsache wurde schon verschiedentlich bei Derivationsgetrieben ausgenützt, wenn es sich um die Differentiation von Größen mit konstantem Vorzeichen handelte. Die resultierende unsymmetrische Tangentenmechanik ergab einen stark vergrößerten Schwenkwinkel auf der benutzten Seite.) Nun lag es nahe, die beiden Rollen in der von Figur 3 her bekannten Weise ideal homoplan anzuordnen, womit sich die Konstruktion nach Figur 30 ergibt. Man kann aber noch einen Schritt weitergehen, indem man die beiden Rollen so gestaltet, dass die beiden Berührungs-Tangentialebenen  $t$  einen gemeinsamen Schnittpunkt  $O$  mit der Rollendrehachse  $W$  besitzen, und gleichzeitig durch symmetrischen Aufbau des Differentialgetriebes dafür sorgt, dass die Kugeldrehachse bei  $y = 0$  in die Symmetrieebene  $S$  des Systems

fällt. Damit erreicht man gerade für den genauigkeitsmässig heiklen Nullpunkt den Sonderfall des idealen Abrollens, wie er in Figur 5 dargestellt worden ist. Während bei der klassischen Anordnung der durch die folgende Beziehung zwischen dem effektiven Übersetzungsverhältnis  $u_e$  und dem Soll-Übersetzungsverhältnis  $u_s$  definierte relative Fehler

$$\Delta u = \frac{u_e - u_s}{u_s} \quad (58)$$

im Nullpunkt stets unendlich gross wird, besteht bei der neuen Bauart eine Chance, dass dieser Fehler endlich bleibt, da gerade im Nullpunkt das praktisch



Figur 30

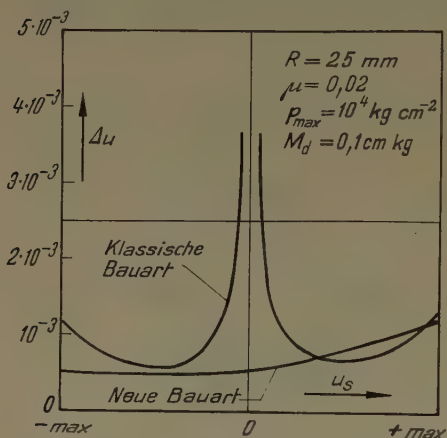
Dritter Schritt: Einsatz koaxialer, möglichst ideal abrollender Rollenpaare.

völlig schlupffreie ideale Abrollen gegeben ist. Figur 31 zeigt den Verlauf der unter Berücksichtigung aller Lagerreibungen sowie des Einflusses der Steuerrollen berechneten Fehler  $\Delta u$  für beide Bauarten in Funktion des Übersetzungsverhältnisses  $u_s$  unter Annahme geometrisch absolut genauer Anordnung aller Teile, einer bestimmten in der Praxis vorkommenden Belastung, gleicher Kugelgrösse und gleicher Materialien.

In Tat und Wahrheit schneidet der neue Integrator, der wegen einer besonderen, hier nicht interessierenden Einsatzmöglichkeit im Rahmen der *Amsler-Integrieranlage* als «*Nebenschlussintegrator*» bezeichnet wird [18], [19], noch etwas besser ab, und zwar aus folgendem Grund: Die in Figur 14 gezeigten Rollen genügen offenbar nicht, um den Kugelmittelpunkt in seiner Lage festzuhalten. Zu diesem Zweck werden meist mindestens zwei weitere Rollen verwendet, die beide unter Federkraft stehen und so für die Anpressung der Kugel an die Arbeitsrollen sorgen. Die eine dieser Stützrollen ist homoplan mit  $r_1$  und  $r_2$  (in Figur 14 gestrichelt eingezeichnet). Die zweite liegt der Steuerrolle  $r_3$  polar gegenüber und wird mit dieser zusammen so geschwenkt, dass die beiden



Drehachsen stets homoplan (in diesem Fall also parallel) zueinander sind; man hat also zwei Steuerrollen. Wie schon erwähnt wurde, ist die Bewegung der Kugel überbestimmt und die Genauigkeit gestört, sobald Rollen, die homoplan sein sollten, in Wirklichkeit inhomoplan sind. Bei der Fabrikation des klassischen Kugelintegrators hängt also sehr viel davon ab, mit welcher Genauigkeit das Rolltripel am Äquator der Kugel bzw. das Steuerrollenpaar in je eine homoplane Ebene gebracht werden kann. Beim Nebenschlussintegrator wurden nun auch die Steuerrollen koaxial an einem kurbelartigen Gebilde angeordnet, das



Figur 31

Schlupfcharakteristiken des klassischen und des neuen Integrators.

um die durch den Kugelmittelpunkt gehende Achse  $z$  geschwenkt wird. Selbstverständlich ist hier – wo die Möglichkeit dazu gegeben ist – dafür gesorgt, dass die Steuerrollen ideal auf der Kugel abrollen. Von den vier vorhandenen Rollen (die übrigens das absolute Minimum zum einwandfreien Festhalten des Kugelmittelpunktes in seiner Lage darstellen) braucht nur eine einzige unter Federdruck zu stehen, um dem ganzen System die nötigen Anpresskräfte zu erteilen. Im vorliegenden Fall geschieht dies an einer der Steuerrollen, wodurch ein weiterer Vorteil erzielt wird: Da die resultierende Anpresskraft offenbar stets in der homopla-

nen Ebene der Steuerrollen liegt, fällt ihre Wirkungslinie mit der Kugeldrehachse zusammen. Also erhält von den beiden festen Rollen stets diejenige einen grösseren Kraftanteil, auf der die Kugel mit dem kleineren wirksamen Radius und somit auch unter ungünstigeren Mahlverhältnissen abrollt. Dadurch wird der Schlupf auch ausserhalb des Nullpunktes wesentlich reduziert.

Insgesamt hat man also durch konsequente Anwendung der Theorie des technischen Kugelgetriebes folgende Vorteile erzielt:

Reduktion der Rollenzahl auf vier.

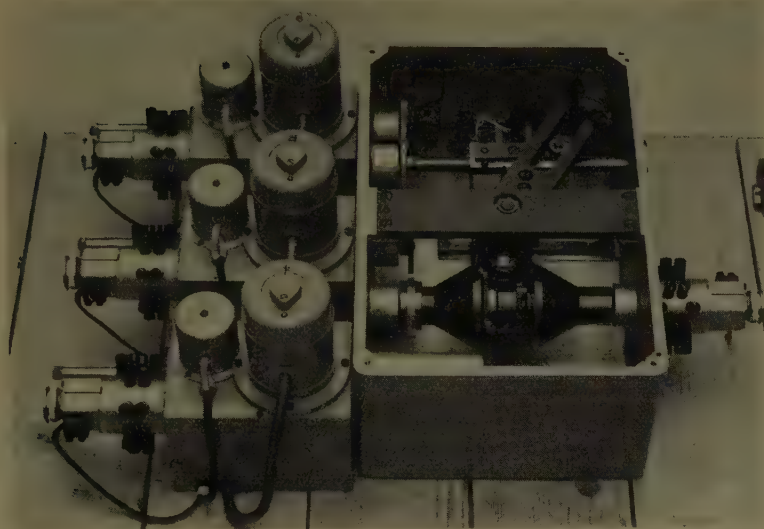
Zusammenfassung je zweier Rollen zu einem fast ideal homoplanen Paar; dadurch weitgehende Unabhängigkeit von Fabrikationsungenauigkeiten.

Minimale Abweichung aller Rollen vom idealen Abrollen; dadurch kleiner Leistungsbedarf und Verschleiss; zwei Rollen rollen stets ideal ab.

Völlige Ausschaltung des reinen Mahlens im gesamten Arbeitsbereich.

Ideales Abrollen aller vier Rollen im Nullpunkt.

Automatische Regelung der Anpressung im Sinne eines minimalen Schlupfes.



Figur 32

Nebenschlussintegrator der Amsler-Integrieranlage. Die Kugel mit den konischen Rollen sowie die unsymmetrische Tangentenmechanik sind gut sichtbar.

Die praktische Erprobung der ersten ausgeführten Nebenschlussintegratoren bestätigte die angestellten Überlegungen in vollem Umfang. Trotz des kleineren verfügbaren Schwenkwinkels und ohne besondere fabrikatorische Sorgfalt wurde in den normalen Arbeitsbereichen die Genauigkeit der besten klassischen Integratoren unschwer erreicht und in der Nähe des Nullpunktes wesentlich überboten. Die Verschleissfestigkeit übertraf alle Erwartungen: Selbst stundenlange Probeläufe bei stark übersetzten Belastungen und Drehzahlen konnten ohne die geringsten Abnutzungsspuren durchgeführt werden.

Einer dieser Integratoren ist in Figur 32 dargestellt.

### Abschliessende Bemerkungen

Die vorliegende Arbeit erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sowohl in theoretischer wie in praktischer Hinsicht könnte noch manches Interessante gesagt werden. Es ging dem Verfasser aber auch gar nicht darum, eine lückenlose Aufzählung aller Formeln und aller Anwendungsmöglichkeiten zu liefern. Vielmehr war er bemüht, den Leser auf ein Gebiet hinzuweisen, das bisher allzusehr am Rande der technischen Entwicklung gestanden hat und das bei konsequenter Ausnützung der zur Verfügung stehenden Erkenntnisse eine Reihe eleganter Anwendungsmöglichkeiten bietet.

Sollte es gelungen sein, mit dieser Abhandlung neues Interesse für das behandelte Gebiet zu wecken, so ist der Zweck der Arbeit erfüllt.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. SHAW, *The Theory of Continuous Calculating Machines*, Phil. trans. Roy. Soc., Part. II, 1885, 367–402.
- [2] V. BUSH und S. H. CALDWELL, *A New Type of Differential Analyzer*, J. Franklin Inst. 240, Nr. 4, 255–326 (1945).
- [3] D. DUBOIS, *Die Schöpfungen Jakob und Alfred Amslers*, Mitt. Naturf. Ges. Schaffhausen, 19, Nr. 5, 209–273 (1944).
- [4] H. A. GAUDY, *Vierachsiger Dynamometerwagen der SBB.*, Schweiz. Bauztg. 64, Nr. 5 (1914).
- [5] G. BOHL, *Appareil de la S. N. C. F. pour le tracé des horaires des trains*, Rev. gén. Chemins de Fer 69, 161–167 (1950).
- [6] F. DUBOIS, *Ein Apparat zur automatischen Aufzeichnung der Eisenbahnfahrpläne*, Neue Zürcher Zeitung, 14. Februar 1951, Nr. 321, Beilage Technik.
- [7] W. MEYER ZUR CAPELLEN, *Mathematische Instrumente* (Becker & Erler, Leipzig 1941).
- [8] F. A. WILLERS, *Mathematische Maschinen und Instrumente* (Akademieverlag, Berlin 1951).
- [9] M. LATTMANN, *Neue technische Mittel zur Behandlung mathematischer Probleme*, Mitt. Vereinig. schweiz. Vers.-Math. 48, H. 1 (1948).
- [10] T. ERISMANN, *Einige neue mechanische Integriergeräte*, Z. angew. Math. Mech. 31, Nr. 8/9 (1951).
- [11] T. ERISMANN, *Alle und neue mechanische Integriergeräte*, Neue Zürcher Zeitung, 16. Januar 1952, Nr. 109, Beilage Technik.
- [12] T. ERISMANN, *Anciens et nouveaux appareils mécaniques d'intégration*, Bull. techn. Suisse romande, 21. Februar und 7. März 1953.
- [13] F. DUBOIS, *Nouveaux appareils pour opérations mathématiques*, Génie civil 130, Nr. 7 (1953).
- [14] A. KUHLENKAMP, *Differentiations- und Integrationsgetriebe*, Z. Ver. dtsh. Ing. 91, Nr. 22, 567–575 (1949).
- [15] A. KUHLENKAMP, *Neuzeitliche mechanische Rechengерäte*, Z. Ver. dtsh. Ing. 93, Nr. 12, 320–321 (1951).
- [16] P. CURTI und F. DUBOIS, *Die mechanische Lösung des ausserballistischen Hauptproblems*, Schweiz. Bauztg., 67, Nr. 3 (1949).
- [17] P. CURTI und F. DUBOIS, *La solution mécanique du problème de la balistique extérieure*, Rev. mil. suisse 97, Nr. 7 (1952).
- [18] T. ERISMANN, *Eine neue Integrieranlage*, Z. angew. Math. Mech. Nr. 8/9 (1952).
- [19] T. ERISMANN, *Alle und neue Integrieranlagen*, Neue Zürcher Zeitung, 12. November 1952, Nr. 2512/2513, Beilage Technik.

### Summary

A definition is given for a certain class of gears known as 'genuine spherical gears'. The theoretical behaviour of these gears is analysed and formulae for calculating their efficiency are deduced. A large number of existing and possible applications for computing machines, servo systems and other purposes are described.

(Eingegangen am 20. Oktober 1953.)



# On the Concentration of Stresses Due to a Small Elliptic Inclusion on the Neutral Axis of a Deep Beam under Constant Bending Moment

By SISIR CHANDRA DAS, Chandernagore, India<sup>1)</sup>

## Introduction

Stress concentrations due to elliptical inclusions for an infinite plate subjected to uniform tensile and shearing stresses have been obtained by DONNELL [1]<sup>2)</sup>.

The object of the present paper is to examine the stresses due to a small elliptic inclusion whose centre lies on the neutral axis of a deep beam of rectangular section under uniform bending moment.

The stresses have been calculated for an elliptic slag in steel when both slag and steel have the same POISSON'S ratio, and the YOUNG'S modulus of the slag is one-quarter that of the surrounding material. Particular cases of a reinforcement very rigid in comparison with the beam and of a flaw in the beam have also been discussed in detail.

## Nomenclature

- $x, y$  = Cartesian coordinates;
- $\xi, \eta$  = elliptic coordinates;
- $u, v$  =  $(u_\xi, u_\eta)$  = components of displacements;
- $\epsilon_\xi, \epsilon_\eta$  = unit elongations in  $\xi$ - and  $\eta$ -directions;
- $\gamma_{\xi\eta}$  = shearing strain;
- $\sigma_\xi, \sigma_\eta$  = normal stress components in elliptical coordinates;
- $\tau_{\xi\eta}$  = shearing stress in elliptic coordinates;
- $\sigma_x, \sigma_y$  = normal stress in Cartesian coordinates;
- $\tau_{xy}$  = shearing stress in Cartesian coordinates;
- $E$  = YOUNG'S modulus for the beam;
- $\nu$  = POISSON'S ratio for the beam;
- $1/h_1, 1/h_2$  = stretch ratios;
- $e = \epsilon_x + \epsilon_y$  = dilatation;
- $2\omega$  = rotation;
- $M$  = bending moment;

<sup>1)</sup> Chandernagore College, Department of Mathematics.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to the References, page 398.

$$\begin{aligned}
 t &= \text{thickness;} \\
 d &= \text{depth of the beam;} \\
 a, b &= \text{major and minor semiaxes of the ellipse;} \\
 A_{+2}, \dots, B_{+1}, \dots &= \text{constants;} \\
 c &= \sqrt{a^2 - b^2}; \\
 A &= 12 M / (t d^3); \\
 k &= E' / E; \\
 \phi &= (3 - \nu) / (1 + \nu).
 \end{aligned}$$

The same symbols have been used with primes for the region inside the discontinuity.

### 1. Method of Solution

Let the centre of the inclusion be the origin, the neutral axis the axis of  $x$ , and a line at right angles to it through the origin the axis of  $y$ .

Using the transformation

$$x + iy = c \cosh(\xi + i\eta) \quad (1.1)$$

i.e.

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad y = c \sinh \xi \sin \eta \quad (1.2)$$

we get

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1, \quad (1.3)$$

which for different values of  $\xi$  gives a set of ellipses. The ellipse corresponding to the value  $\xi = \alpha$  is taken as the boundary of the inclusion with the semi-axes  $c \cosh \alpha$ ,  $c \sinh \alpha$  in the  $x$ -,  $y$ -direction respectively.

When  $u_\xi = u$  and  $u_\eta = v$  stand for the displacements in the directions of the normals to the lines  $\xi = \text{const}$  and  $\eta = \text{const}$ , the strain components are given by

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_\xi &= h_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + h_1 h_2 v \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_1} \right), \\
 \varepsilon_\eta &= h_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + h_1 h_2 u \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_2} \right), \\
 \gamma_{\xi\eta} &= \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 v) + \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 u).
 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Considering the problem of a deep beam as that of a plane stress, we find from the above relations the stresses

$$\sigma_\xi = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\xi + \nu \varepsilon_\eta), \quad \sigma_\eta = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\eta + \nu \varepsilon_\xi), \quad \tau_{\xi\eta} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{\xi\eta}. \quad (1.5)$$

where  $E$  and  $\nu$  are YOUNG'S modulus and POISSON'S ratio, and  $1/h_1$  and  $1/h_2$  are the two stretch ratios which in our coordinates are given by

$$\frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{h_2^2} = \frac{c^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta). \quad (1.6)$$

The equilibrium conditions will be satisfied if the expressions

$$c = h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v}{h_1} \right) \right], \quad \omega = \frac{1}{2} h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{v}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u}{h_1} \right) \right] \quad (1.7)$$

satisfy LAPLACE'S equation and there is a function  $F$  of the complex variable  $\xi + i\eta$  such that

$$c + i(1 - \nu)\omega = F(\xi + i\eta). \quad (1.8)$$

## 2. Boundary Conditions

When  $M$  is the bending moment,  $t$  the thickness and  $d$  the depth of the beam, the conditions to be satisfied are

$$\sigma_x = A y, \quad (2.1)$$

and

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (2.2)$$

at infinite distance where

$$A = \frac{12 M}{t d^3}. \quad (2.3)$$

In elliptic coordinates the stresses can be taken as

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{A c}{8} (\sin \eta + \sin 3\eta) e^\xi, \\ \sigma_\eta &= \frac{A c}{8} (3 \sin \eta - \sin 3\eta) e^\xi, \\ \tau_{\xi\eta} &= \frac{A c}{8} (\cos 3\eta - \cos \eta) e^\xi, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

when  $\xi \rightarrow \infty$ .

At the boundary of the discontinuity, i.e. for  $\xi = \alpha$ , we have

$$\sigma_\xi = \sigma'_\xi, \quad \tau_{\xi\eta} = \tau'_{\xi\eta} \quad (2.5)$$

and

$$u = u', \quad v = v', \quad (2.6)$$

where primes denote the stresses and displacements for the inclusion.



For  $\xi = 0$  we must have

$$u' = 0 \quad (2.7)$$

for all types of elastic materials.

### 3. The Solution of the Problem

As a solution suitable for our problem, we take for the material of the beam, i.e. for  $\xi \geq \alpha$ ,

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{-\sqrt{2}(1+\nu)c}{E\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} \\ &\quad \times \left[ \frac{A_{+2}}{2} \left\{ \left(1 - \frac{p}{2}\right) e^{3\xi} \sin \eta + \left(1 + \frac{p}{2}\right) e^{\xi} \sin 3\eta \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_{-2}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{p}{2}\right) e^{-\xi} \sin 3\eta + \left(1 - \frac{p}{2}\right) e^{-3\xi} \sin \eta \right\} \right. \\ &\quad \left. + \{B_{+3} e^{3\xi} - B_{-3} e^{-3\xi}\} \sin 3\eta \right. \\ &\quad \left. + \{B_{+1} e^{\xi} - B_{-1} e^{-\xi}\} \sin \eta \right], \\ v &= \frac{-\sqrt{2}(1+\nu)c}{E\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} \\ &\quad \times \left[ \frac{A_{+2}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{p}{2}\right) e^{3\xi} \cos \eta + \left(1 - \frac{p}{2}\right) e^{\xi} \cos 3\eta \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_{-2}}{2} \left\{ \left(1 - \frac{p}{2}\right) e^{-\xi} \cos 3\eta + \left(1 + \frac{p}{2}\right) e^{-3\xi} \cos \eta \right\} \right. \\ &\quad \left. + \{B_{+3} e^{3\xi} + B_{-3} e^{-3\xi}\} \cos 3\eta \right. \\ &\quad \left. + \{B_{+1} e^{\xi} + B_{-1} e^{-\xi}\} \cos \eta \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

and for the inclusion, i.e. for  $\xi \leq \alpha$ ,

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{-\sqrt{2}(1+\nu')c}{E'\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} \\ &\quad \times \left[ \frac{A'_{+2}}{2} \left\{ \left(1 - \frac{p'}{2}\right) e^{3\xi} \sin \eta + \left(1 + \frac{p'}{2}\right) e^{\xi} \sin 3\eta \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{A'_{-2}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{p'}{2}\right) e^{-\xi} \sin 3\eta + \left(1 - \frac{p'}{2}\right) e^{-3\xi} \sin \eta \right\} \right. \\ &\quad \left. + \{B'_{+3} e^{3\xi} - B'_{-3} e^{-3\xi}\} \sin 3\eta \right. \\ &\quad \left. + \{B'_{+1} e^{\xi} - B'_{-1} e^{-\xi}\} \sin \eta \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$v' = \frac{-\sqrt{2}(1+\nu')c}{E'\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} \times \left[ \begin{aligned} &\frac{A'_{+2}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{p'}{2}\right) e^{3\xi} \cos \eta + \left(1 - \frac{p'}{2}\right) e^{\xi} \cos 3\eta \right\} \\ &+ \frac{A'_{-2}}{2} \left\{ \left(1 - \frac{p'}{2}\right) e^{-\xi} \cos 3\eta + \left(1 + \frac{p'}{2}\right) e^{-3\xi} \cos \eta \right\} \\ &+ \{B'_{+3} e^{3\xi} + B'_{-3} e^{-3\xi}\} \cos 3\eta \\ &+ \{B'_{+1} e^{\xi} + B'_{-1} e^{-\xi}\} \cos \eta \end{aligned} \right] \quad (3.2)$$

where  $E'$ ,  $\nu'$  are YOUNG'S modulus and POISSON'S ratio for the inclusion,  $A$ 's and  $B$ 's are constants,

$$p = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad p' = \frac{3-\nu'}{1+\nu'}, \quad (3.3)$$

and  $u'$ ,  $v'$  are the components of displacement for the inclusion.

The equilibrium conditions are obviously satisfied.

The stresses calculated from the displacements (3.1) are

$$\sigma_{\xi} = \frac{1}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2} \times \left[ \begin{aligned} &\frac{A_{+2}}{2} \{ 3e^{\xi} \sin 5\eta - (5e^{-\xi} + 4e^{3\xi}) \sin 3\eta \\ &\quad + (e^{5\xi} - e^{3\xi} + 4e^{\xi}) \sin \eta \} \\ &+ \frac{A_{-2}}{2} \{ 3e^{-\xi} \sin 5\eta - (5e^{\xi} + 4e^{-3\xi}) \sin 3\eta \\ &\quad + (e^{-5\xi} - e^{-3\xi} + 4e^{-\xi}) \sin \eta \} \\ &+ B_{+3} \{ 2e^{3\xi} \sin 5\eta - (2e^{5\xi} + 4e^{\xi}) \sin 3\eta + 4e^{3\xi} \sin \eta \} \\ &+ B_{-3} \{ 2e^{-3\xi} \sin 5\eta - (2e^{-5\xi} + 4e^{-\xi}) \sin 3\eta + 4e^{-3\xi} \sin \eta \} \\ &- 2(B_{+1} + B_{-1}) (e^{\xi} + e^{-\xi}) \sin \eta \end{aligned} \right] \quad (3.4)$$

$$\sigma_{\eta} = \frac{1}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2} \times \left[ \begin{aligned} &\frac{A_{+2}}{2} \{ e^{\xi} \sin 5\eta + (e^{-\xi} - 4e^{3\xi}) \sin 3\eta \\ &\quad + (3e^{5\xi} + 5e^{3\xi} + 4e^{\xi}) \sin \eta \} \\ &+ \frac{A_{-2}}{2} \{ e^{-\xi} \sin 5\eta + (e^{\xi} - 4e^{-3\xi}) \sin 3\eta \\ &\quad + (3e^{-5\xi} + 5e^{-3\xi} + 4e^{-\xi}) \sin \eta \} \\ &+ B_{+3} \{ -2e^{3\xi} \sin 5\eta + (2e^{5\xi} + 4e^{\xi}) \sin 3\eta - 4e^{3\xi} \sin \eta \} \\ &+ B_{-3} \{ -2e^{-3\xi} \sin 5\eta + (2e^{-5\xi} + 4e^{-\xi}) \sin 3\eta - 4e^{-3\xi} \sin \eta \} \\ &+ 2(B_{+1} + B_{-1}) (e^{\xi} + e^{-\xi}) \sin \eta \end{aligned} \right]$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{1}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2} \times \left[ \begin{aligned} & \frac{A_{+2}}{2} \{ e^\xi \cos 5\eta - 3e^{-\xi} \cos 3\eta + (3e^{3\xi} - e^{5\xi}) \cos \eta \} \\ & + \frac{A_{-2}}{2} \{ -e^{-\xi} \cos 5\eta + 3e^\xi \cos 3\eta + (e^{-5\xi} - 3e^{-3\xi}) \cos \eta \} \\ & + B_{+3} \{ 2e^{3\xi} \cos 5\eta - 2(2e^\xi + e^{5\xi}) \cos 3\eta + 4e^{3\xi} \cos \eta \} \\ & + B_{-3} \{ -2e^{-3\xi} \cos 5\eta + 2(2e^{-\xi} + e^{-5\xi}) \cos 3\eta \\ & \quad - 4e^{-3\xi} \cos \eta \} \\ & + 2(B_{+1} + B_{-1})(e^\xi - e^{-\xi}) \cos \eta \end{aligned} \right] \quad (3.4)$$

Analogous expressions for stresses can be obtained for the inclusion, the constants being replaced by those with primes.

Conditions (2.4) will be satisfied if

$$A_{+2} = \frac{Ac}{16}, \quad B_{+3} = -\frac{Ac}{64}, \quad (3.5)$$

and the boundary condition (2.7) gives

$$A'_{+2} = A'_{-2}, \quad B'_{+2} = B'_{-2}, \quad B'_{+1} = B'_{-1}, \quad (3.6)$$

from which it is clearly seen that  $\tau'_{\xi\eta} = 0$  at  $\xi = 0$ .

Assuming POISSON'S ratio to be same for both materials, i.e.

$$\nu = \nu' \quad \text{and} \quad \rho = \rho',$$

which is the case in most practical applications, we see that the boundary conditions (2.5) and (2.6) will be satisfied if

$$\left. \begin{aligned} & A'_{+2} \left[ \frac{k(p+1)}{(p+k)(1+\rho k)} e^{4\alpha} A_{+2} - 2(k-1)(2B_{+3} + e^{-2\alpha} A_{+2}) \right] \\ & \quad - \frac{k(p+1)}{(p+k)(1+\rho k)} e^{4\alpha} + 2(k-1)(1-\rho k)(e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) - p(k-1)^2 e^{-4\alpha}, \\ & \quad 4B'_{+3} e^{3\alpha} = A'_{+2} \left[ -2e^\alpha + \frac{p(1-k)}{\rho k+1} e^{-\alpha} \right] \\ & \quad \quad + \frac{2k(1+p)e^\alpha}{\rho k+1} (A_{+2} + 2B_{+3} e^{2\alpha}), \\ & \quad A_{-2} = \frac{p+1}{\rho k+1} A'_{+2} \\ & \quad \quad + \frac{2(k-1)}{\rho k+1} (A_{+2} + 2B_{+3} e^{2\alpha}) e^{2\alpha}, \\ & \quad 4B_{-3} e^{-3\alpha} = \frac{p+1}{1-k} e^\alpha A'_{+2} \\ & \quad \quad - \frac{1+\rho k}{1-k} A_{+2} - 2e^{-\alpha} A_{-2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$



$$\left. \begin{aligned}
 8 B'_{+1} (e^\alpha - e^{-\alpha}) (1 - k) &= k (p + 1) [A_{+2} (e^{5\alpha} - e^{3\alpha} + 2 e^\alpha) \\
 &\quad - A_{-2} (e^{-5\alpha} - e^{-3\alpha} + 2 e^{-\alpha})] \\
 &\quad - A'_{+2} [(p + k) (e^{5\alpha} - e^{-5\alpha}) - (3k + p - 2) \\
 &\quad \times (e^{3\alpha} - e^{-3\alpha}) + 2(p + 1) (e^\alpha - e^{-\alpha})] \\
 &\quad + 8 B'_{+3} (k - 1) (e^{3\alpha} - e^{-3\alpha}), \\
 2 k e^\alpha B_{+1} - k \left[ A_{+2} e^{3\alpha} + \frac{p}{2} A_{-2} e^{-3\alpha} \right] \\
 &\quad + A'_{+2} \left[ e^{3\alpha} + \frac{p}{2} e^{-3\alpha} \right] + 2 e^\alpha B'_{+1}, \\
 2 k e^{-\alpha} B_{-1} - k \left[ \frac{p}{2} A_{+2} e^{3\alpha} + A_{-2} e^{-3\alpha} \right] \\
 &\quad + A'_{+2} \left[ \frac{p}{2} e^{3\alpha} + e^{-3\alpha} \right] + 2 e^{-\alpha} B'_{+1}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

where

$$k = \frac{E'}{E}. \quad (3.8)$$

In the general case the actual calculation of stresses from these expressions becomes very lengthy, but when the elasticity of the inclusion and the surrounding material as well as the form of the ellipse is known the calculation becomes simpler. As an example of practical importance, let us consider the case of an elliptical slag in steel. It is assumed that both the slag and the steel have the same Poisson's ratio given by  $p = 2$ , and the shape ratio of the ellipse is given by

$$\frac{a}{b} = 2, \quad (3.9)$$

where  $a, b$  are the major and minor semiaxes respectively. We also take YOUNG's modulus of the inclusion to be one-quarter that of the surrounding material, i.e.  $k = 1/4$ , a plausible value for slag in steel. It is clear that the maximum stresses will occur at the boundary of the discontinuity, i.e. at  $\xi = \alpha$ .

For the stresses we get

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_\xi &= \frac{3 A a}{776 (5 - 3 \cos 2 \eta)^2} [45 \sin 5 \eta - 351 \sin 3 \eta + 916 \sin \eta], \\
 \sigma_\eta &= \frac{3 A a}{776 (5 - 3 \cos 2 \eta)^2} [729 \sin 5 \eta - 3651 \sin 3 \eta + 6020 \sin \eta], \\
 \tau_{\xi \eta} &= \frac{3 A a}{1552 (5 - 3 \cos 2 \eta)^2} [-189 \cos 5 \eta + 1065 \cos 3 \eta - 1204 \cos \eta].
 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

At the ends of the axes these stresses are as follows:

At  $\eta = 0$ ,

$$\sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = 0, \quad \tau_{\xi\eta} = 0.1585 A a \quad (3.11)$$

and at  $\eta = \pi/2$ ,

$$\tau_{\xi\eta} = 0, \quad \sigma_{\xi} = 0.0792 A a, \quad \sigma_{\eta} = 0.6282 A a. \quad (3.12)$$

Another case of practical importance is that of a reinforcement which is very stiff compared to the surrounding material. In this case  $k \rightarrow \infty$  and the stresses on the boundary of the discontinuity  $\xi = \alpha$  are given by

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{(p+1) A c}{p \cdot 32 (\cosh 2 \alpha - \cos 2 \eta)^2} \\ &\times \left[ \{ (p+2) e^{\alpha} - e^{3\alpha} \} \sin 5 \eta \right. \\ &\quad - \{ (p+4) e^{-\alpha} - 2 e^{\alpha} - e^{5\alpha} + (2p+2) e^{3\alpha} \} \sin 3 \eta \\ &\quad \left. + \{ p e^{5\alpha} + (p-2) e^{3\alpha} + (2p+3) e^{\alpha} + e^{-\alpha} + 2 e^{-3\alpha} \} \sin \eta \right], \\ \sigma_{\eta} &= \frac{(3-p) A c}{p \cdot 32 (\cosh 2 \alpha - \cos 2 \eta)^2} \\ &\times \left[ \{ (p+2) e^{\alpha} - e^{3\alpha} \} \sin 5 \eta \right. \\ &\quad - \{ (p+4) e^{-\alpha} - 2 e^{\alpha} - e^{5\alpha} + (2p+2) e^{3\alpha} \} \sin 3 \eta \\ &\quad \left. + \{ p e^{5\alpha} + (p-2) e^{3\alpha} + (2p+3) e^{\alpha} + e^{-\alpha} + 2 e^{-3\alpha} \} \sin \eta \right], \\ \tau_{\xi\eta} &= \frac{(p+1) A c}{p \cdot 32 (\cosh 2 \alpha - \cos 2 \eta)^2} \\ &\times \left[ \{ e^{\alpha} (2-p) - e^{3\alpha} \} \cos 5 \eta \right. \\ &\quad + \{ (p-4) e^{-\alpha} + 2 (p-1) e^{3\alpha} + e^{5\alpha} + 2 e^{\alpha} \} \cos 3 \eta \\ &\quad \left. + \{ -p e^{5\alpha} + (p-2) e^{3\alpha} + [5-2p] e^{\alpha} - 3 e^{-\alpha} + 2 e^{-3\alpha} \} \cos \eta \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

where the displacements  $u$  and  $v$  vanish.

The maximum and minimum stresses will occur at the ends of the axes, i.e. at  $\eta = 0$  or  $\pi$  and  $\eta = \pm \pi/2$ . We shall calculate the stresses at those points for  $p = 2$  which is the case in most applications.

At  $\eta = 0$

$$\sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = 0$$

and

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= \frac{3 A c}{64 (\cosh 2 \alpha - 1)^2} [-e^{5\alpha} + e^{3\alpha} + 3 e^{\alpha} - 5 e^{-\alpha} + 2 e^{-3\alpha}] \\ &= \frac{-3 A (a+b) (3a-b)}{32 b} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

at  $\eta = \pi/2$ ,

$$\tau_{\xi\eta} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{3 A c}{64 (\cosh 2 \alpha + 1)^2} [e^{5\alpha} + 5 e^{3\alpha} + 9 e^{\alpha} + 7 e^{-\alpha} + 2 e^{-3\alpha}] \\ &= \frac{3 A (a+b) (3a-b)}{32 a}, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta} &= \frac{A c}{64 (\cosh 2 \alpha + 1)^2} [e^{5\alpha} + 5 e^{3\alpha} + 9 e^{\alpha} + 7 e^{-\alpha} + 2 e^{-3\alpha}] \\ &= \frac{A (a+b) (3a-b)}{32 a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

In the case of circular insertion the values of the stresses can be easily obtained from the above expressions.

Finally, we consider the case of a hole. Here  $k = 0$  and the stresses on the elliptic boundary are given by

$$\sigma_{\xi} = \tau_{\xi\eta} = 0$$

and

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta} &= \frac{A c (e^{2\alpha} - 1)}{8 (\cosh 2 \alpha - \cos 2 \eta)^2} [e^{\alpha} \sin 5 \eta - (e^{3\alpha} + e^{\alpha} + 3 e^{-\alpha}) \sin 3 \eta \\ &\quad + (e^{3\alpha} + 4 e^{\alpha} + 3 e^{-\alpha} + 2 e^{-3\alpha}) \sin \eta], \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

which can be written in the form

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta} &= \frac{A c \sinh \alpha (\cosh \alpha + \sinh \alpha)}{2 (\cosh 2 \alpha - \cos 2 \eta)} [(3 \cosh \alpha - \sinh \alpha) \sin \eta \\ &\quad - (\cosh \alpha + \sinh \alpha) \sin 3 \eta]. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

The above results tally with those obtained by SEN [2].

When  $\eta = \pm \pi/2$ , i.e. at the ends of the minor axis, we get

$$\sigma_{\eta} = \pm A b \left(1 + \frac{b}{a}\right), \quad (3.19)$$

the result worked out by WOLF [3].

If  $a = b$ , i.e. if the hole is circular, we have

$$\sigma_{\eta} = \pm 2 A a. \quad (3.20)$$

This is the value obtained by TUZI [4].



### Acknowledgment

The author expresses his grateful thanks to Dr. B. SEN for his kind help in the preparation of this paper.

### REFERENCES

- [1] L. H. DONNELL, *Stress Concentration Due to Elliptical Discontinuities in Plates Under Edge Forces*, Ann. Vol. of T. Von Kármán, Calif. Inst. Tech. 1941, 293–309.
- [2] B. SEN, *Stresses Due to a Small Elliptic Hole or Crack on the Neutral Axis of a Deep Beam under Constant Bending Moment*, Phil. Mag. [7] 12, 312–19 (1931).
- [3] K. WOLF, *Z. techn. Phys.* No. 8, 160 (1921).
- [4] Z. TUZI, *Effect of a Circular Hole on the Stress Distribution in a Deep Beam under Uniform Bending Moment*, Phil. Mag. [7] 9, 210 (1930).

### Zusammenfassung

Es wird die Spannungsverteilung untersucht, die sich in einem breiten Balken mit konstanter Höhe unter einem konstanten Biegemoment ausbildet, wenn er eine kleine elliptische Einschliessung mit Zentrum auf der Neutralachse enthält. Insbesondere werden die Fälle eines sehr starren Einschlusses sowie eines elliptischen Loches im Detail diskutiert.

(Received: September 19, 1953.)

## The Theory of an Oscillating Cylinder Viscometer

By ALI A. K. IBRAHIM and ABDEL MONEM I. KABIEL, Alexandria, Egypt<sup>1)</sup>

### Abstract

The theoretical details of periodic state of motion of a liquid (Newtonian) in a narrow annular gap between long vertical coaxial cylinders is given in a new way.

If the inner cylinder is suspended by a delicate torsion wire while the outer cylinder undergoes forced harmonic oscillations about its axis, the amplitude of uniform oscillation attained by the inner cylinder can be calculated. Two equations are derived for this purpose; the first is neither simple nor direct with respect to  $\eta$  (coefficient of viscosity of the liquid) and the other constants of the apparatus, but covers all liquids with various densities and viscosities, while the second is more simple and direct but covers only liquids of  $\eta > 1$ . The theory agrees well with experiment for all values of  $\theta_0/\varphi_0$ , where  $\theta_0$  is the

<sup>1)</sup> Physics Department, Faculty of Science, University of Alexandria.

amplitude of deflection of the inner cylinder and  $\varphi_0$  is the amplitude of oscillations inexorably imposed on the outer cylinder.  $\theta_0/\varphi_0$  and  $V_{-d}/\varphi_0$ , where  $V_{-d}$  is the velocity of the liquid in the neighbourhood of the curved surface of the inner cylinder, has been plotted as function of the frequency for different values of the constants of the liquid of an available apparatus.

Also the effect of density of the liquid has been discussed, and the condition of resonance between the liquid and the inner cylinder is given.

### The Theory

Suppose a fluid to be contained in a narrow annular gap between long vertical coaxial cylinders. The inner cylinder ( $L$  cm long with a diameter  $2a$  cm) having a moment of inertia  $I$  (in  $\text{g cm}^2$ ) about its major axis, is hung by a delicate torsion wire (of restoring constant  $\tau$  in  $\text{g cm}^2 \text{s}^{-2}$ ) so that it may turn about a vertical axis. The outer cylinder has an inner diameter  $2b$  cm and is maintained (by means of connecting rods to an electric motor) in a state of forced harmonic angular uniform oscillations through small angular amplitudes about its central vertical axis, so that an alternating torque is applied to the fluid and viscosity comes into play.

Only two dimensional axially symmetric motion need be considered since it is confirmed experimentally<sup>1)</sup> that when the annular gap is always completely filled, the end effects are negligible. Therefore, it has been found that the velocity ( $V$ ) in  $\text{cm s}^{-1}$  of the fluid is given by the following equation of motion<sup>2)</sup>

$$\frac{1}{\nu} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{d^2V}{dr^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2}, \quad (1)$$

where  $\nu$  is the kinematic viscosity of the liquid in  $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ .

However, making a solution of equation (1) as indicated by us in a previous paper<sup>3)</sup>, it then follows that the angular displacement  $\theta$ , the angular velocity  $\theta'$  and the angular velocity gradient in the neighbourhood of the inner cylinder  $(d\theta'/dy)_{y=-d}$  are given by the following equations:

$$\theta = \frac{\omega \varphi_0 e^{i\omega t}}{F E_1 - F_1 E} [E_1 \exp(m_1 y + i\omega t) - F_1 \exp(m_2 y + i\omega t)], \quad (2)$$

$$\theta' = \frac{i\omega \varphi_0 e^{i\omega t}}{F E_1 - F_1 E} [E_1 \exp(m_1 y + i\omega t) - F_1 \exp(m_2 y + i\omega t)], \quad (3)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d\theta'}{dy} \right)_{y=-d} = \frac{i\omega \varphi_0 e^{i\omega t}}{F E_1 - F_1 E} & \left\{ E_1 m_1 \exp\{m_1(-d) + i\omega t\} \right. \\ & \left. - F_2 m_2 \exp\{m_2(-d) + i\omega t\} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

1) J. G. OLDROYD, J. STROWBRIDGE, and B. TOMS, Proc. Phys. Soc. (London) [B] 64, 44 (1951).

2) H. LAMB, *Hydrodynamics* (Dover Publications, New York, 1945).

3) A. A. K. IBRAHIM and A. M. KABIEL, J. appl. Phys. 23, No. 7 (1952).

where

$\varphi_0$  = the amplitude inexorably imposed on the outer cylinder ,

$$F = \exp (m_1 d + i \omega t) ,$$

$$E = \exp (m_2 d + i \omega t) ,$$

$$F_1 = (m_1 - i \gamma' \omega) \exp \{m_1(-d) + i \omega t\} ,$$

$$E_1 = (m_2 - i \gamma' \omega) \exp \{m_2(-d) + i \omega t\} ,$$

$$m_1 = -\frac{3}{2R} + C + i D ,$$

$$m_2 = -\frac{3}{2R} - C - i D ,$$

$$\gamma' = \frac{I \omega^2 - \tau}{K \eta \omega^2} ,$$

$$K = 2 \pi L a^3 ,$$

$$C = \left\{ \frac{9}{8 R^2} + \left( \frac{81}{64 R^4} + B^4 \right)^{1/2} \right\}^{1/2} ,$$

$$D = \left\{ -\frac{9}{8 R^2} + \left( \frac{81}{64 R^4} + B^4 \right)^{1/2} \right\}^{1/2} ,$$

$$B = \left[ \frac{\pi \rho}{T \eta} \right]^{1/2} ,$$

$$R = \frac{b+a}{2} ,$$

$$d = \frac{b-a}{2} ,$$

$\omega$  = the angular velocity of the outer cylinder and  $y$  varies between  $\pm d$ .

It is often quite convenient to consider the 'modulus' or the absolute value.

Therefore, on solving equation (3) we have

$$\left| \frac{\theta'}{\varphi_0} \right|^2 = \omega^2 \exp \left[ \frac{3}{R} (d-y) \right] \frac{L_1^2 + M_1^2}{L^2 + M^2} , \quad (5)$$

where

$$L_1 = \begin{vmatrix} \exp \{C (d+y)\} & 0 & \exp \{-C (d+y)\} \\ \cos D (d+y) & \cos D (d+y) & \cos D (d+y) \\ C & \frac{3}{2R} & -C \\ \exp \{C (d+y)\} & 0 & \exp \{-C (d+y)\} \\ \sin D (d+y) & \sin D (d+y) & \sin D (d+y) \\ -\gamma' \omega & -D & \gamma' \omega \end{vmatrix} ,$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} \exp\{C(d+y)\} & 0 & \exp\{-C(d+y)\} \\ \cos\{D(d+y)\} & \cos\{D(d+y)\} & \cos\{D(d+y)\} \\ D & \gamma' \omega & -D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \exp\{C(d+y)\} & 0 & \exp\{-C(d+y)\} \\ \sin D(d+y) & \sin D(d+y) & \sin D(d+y) \\ \frac{3}{2R} & C & -\frac{3}{2R} \end{vmatrix},$$

$$L = \begin{vmatrix} \exp(2Cd) & 0 & \exp(-2Cd) \\ \cos 2Dd & \cos 2Dd & \cos 2Dd \\ C & \frac{3}{2R} & -C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \exp(2Cd) & 0 & \exp(-2Cd) \\ \sin 2Dd & \sin 2Dd & \sin 2Dd \\ -\gamma' \omega & -D & \gamma' \omega \end{vmatrix},$$

$$M = \begin{vmatrix} \exp(2Cd) & 0 & \exp(-2Cd) \\ \cos 2Dd & \cos 2Dd & \cos 2Dd \\ D & \gamma' \omega & -D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \exp(2Cd) & 0 & \exp(-2Cd) \\ \sin 2Dd & \sin 2Dd & \sin 2Dd \\ \frac{3}{2R} & C & -\frac{3}{2R} \end{vmatrix}.$$

After some rearrangements, equation (5) may be written in the following form

$$\left| \frac{\theta'}{\varphi_0} \right|^2 = \omega^2 e^{3(d-y)/R} \frac{C^2 + D^2 + A_1 + B_1 + C_1 + D_1}{C^2 + D^2 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2}, \quad (6)$$

where

$$A_1 = (\gamma'^2 \omega^2 - 2D^2) \sin^2 D(d+y), \quad A_2 = (\gamma'^2 \omega^2 - 2D^2) \sin^2 2Dd,$$

$$B_1 = \left( \frac{3D}{2R} - \gamma' \omega C \right) \sin 2D(d+y), \quad B_2 = \left( \frac{3D}{2R} - \gamma' \omega C \right) \sin 4Dd,$$

$$C_1 = (\gamma'^2 \omega^2 + 2C^2) \sinh^2 C(d+y), \quad C_2 = (\gamma'^2 \omega^2 + 2C^2) \sinh^2 2Cd,$$

$$D_1 = \left( \frac{3C}{2R} + \gamma' \omega D \right) \sinh 2C(d+y), \quad D_2 = \left( \frac{3C}{2R} + \gamma' \omega D \right) \sinh 4Cd.$$



This quantity gives the angular velocity-amplitude through the liquid at any distance from the curved surface of the inner cylinder. It is related to linear velocity-amplitude (which is actually measured in practice) at the same place; where

$$\frac{V}{\varphi_0} = (R + y) \left( \frac{\theta'}{\varphi_0} \right), \quad (7)$$

also:

$$\left| \frac{\theta'}{\varphi_0} \right|_{y=-d}^2 = \frac{\omega^2 e^{6d/R} (C^2 + D^2)}{C^2 + D^2 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2} \quad (8)$$

and

$$\left| \frac{V}{\varphi_0} \right|_{y=-d} = a \left| \frac{\theta'}{\varphi_0} \right|_{y=-d} \quad (9)$$

Now, the rate of change of the relative motion of adjacent layers of the liquid can be expressed by:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta'}{dy} \Big|_{y=-d}^2 &= \omega^2 \varphi_0^2 e^{3(d-y)/R} \left\{ \gamma'^2 \omega^2 (C^2 + D^2) + \gamma'^2 \omega^2 (C^2 + D^2) \right. \\ &\quad \times [\sinh^2 C (d + y) - \sin^2 D (d + y)] \\ &\quad + \gamma' \omega \left( 2 C D - \frac{3 \gamma' \omega}{2 R} \right) \\ &\quad \times [C \sinh 2 C (d + y) + D \sin 2 D (d + y)] \\ &\quad + \left( 2 C D - \frac{3 \gamma' \omega}{2 R} \right)^2 \\ &\quad \times [\sinh^2 C (d + y) + \sin^2 D (d + y)] \Big\} \\ &\quad \text{divided by} \\ &\quad \{ C^2 + D^2 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2 \} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

and

$$\left| \frac{d\theta'}{dy} \right|_{y=-d}^2 = \frac{\gamma'^2 \omega^4 \varphi_0^2 e^{6d/R} (C^2 + D^2)}{C^2 + D^2 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2} \quad (11)$$

Hence, the velocity-gradient amplitude may be obtained from the following relation

$$\left| \frac{dV}{dy} \right| = (R + y) \left| \frac{d\theta'}{dy} \right| + |\theta'| \quad (12)$$

and

$$\left| \frac{dV}{dy} \right|_{y=-d} = a \left| \frac{d\theta'}{dy} \right|_{y=-d} + |\theta'|_{y=-d} \quad (13)$$

Also, from equation (2), we have

$$\psi^2 = \left| \frac{\theta}{\varphi_0} \right|^2 = \frac{\left| \frac{\theta'}{\varphi_0} \right|^2}{\omega^2} \quad (14)$$

This gives the angular amplitude of oscillation in the liquid at any radial distance from the curved surface of the inner cylinder to that of the outer cylinder.

Therefore, from equations (6) and (14) we have

$$|\theta'| = \omega \varphi_0 \psi \quad (15)$$

also, from equation (13), we have

$$(\psi^2)_{y=-d} = \left| \frac{\theta_0}{\varphi_0} \right|^2 = \frac{e^{6d/R} (C^2 + D^2)}{C^2 + D^2 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2} \quad (16)$$

This quantity is the magnification factor  $(\psi)_{-d}$ , i.e. the ratio of the angular amplitude of oscillation of the inner cylinder to that of the outer cylinder.

It follows from equations (8) and (16) that

$$|\theta'|_{-d} = \omega \varphi_0 (\psi)_{-d} \quad (17)$$

a special case of the general one, i.e. equation (15).

### Numerical Calculations

The numerical constants (those of OLDROYD<sup>1</sup>) used in our calculations are as follows:

$$a = 2.0701 \text{ cm}, \quad b = 2.1712 \text{ cm}, \quad L = 25.4 \text{ cm},$$

$$I = 2968 \text{ g cm}^2, \quad \tau = 2.79 \cdot 10^6 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2}.$$

Calculations have been made with different values of  $\eta$ , i.e. 1/16, 1/4, 1, 4, 8, and 16 poises.

Formula (16) satisfies that of OLDROYD (see Figure 1) for all values of  $|\theta_0/\varphi_0|$ ; but this formula, although it covers liquids of any density and viscosity, is not a direct relation between  $\eta$  and the other constants of the apparatus, a disadvantage which was already found in previous derived equations. An approximate form, valid for all values of  $\eta > 1$ , is obtained by substituting for  $\sin 2 D d$ ,  $\sin 4 D d$ ,  $\sinh 2 C d$ , and  $\sinh 4 C d$  their approximate values  $2 D d$ ,  $4 D d$ ,  $2 C d$  and  $4 C d$  respectively.

Therefore, equation (16) becomes

$$|\psi^2|_{y=-d} = \left| \frac{\theta_0}{\varphi_0} \right|^2 = \frac{e^{6d/R}}{H} \quad (18)$$

where

$$H = (e^{6d/R} + 4 \gamma'^2 \omega^2 d^2).$$

<sup>1</sup> J. G. OLDROYD, Quart. J. Mech. appl. Math. 3, 271 (1951).

After some reductions, the following approximate formula is obtained

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\theta_0}{\varphi_0} \cdot \frac{b-a}{L} \cdot \frac{I\omega^2 - \tau}{a^3\omega} \left[ 1 - \left( \frac{\theta_0}{\varphi_0} \right)^2 \right]^{-1/2} e^{-3d/R} \quad (19)$$

a simple and direct formula between  $\eta$  on one side and the constants of the apparatus on the other. But when the above numerical constants are used, it is estimated that the formula (18) gives values of  $(\psi)_{-d}$  with deviation from formula (16) of less than about 3.5% for all values of  $\eta > 1$  and of  $n$  sufficient up to 25 c./s.

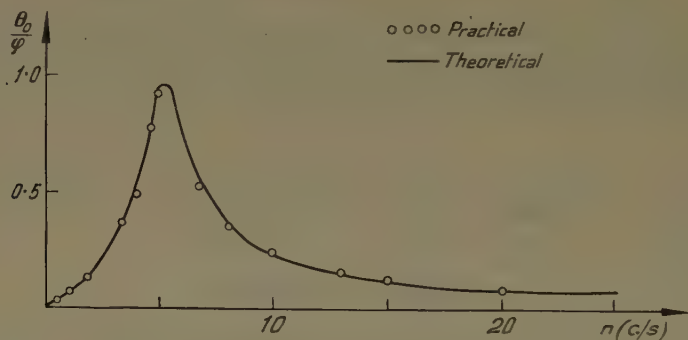


Figure 1

The variation of  $\frac{\theta_0}{\varphi_0}(n)$  for paraffin oil.

When the amplitude of oscillation of the inner cylinder is measured by the path of a beam of light reflected from a mirror to a screen which is usually placed several meters away,

$$\theta_0 = \frac{S}{2M},$$

where  $S$  is the observed deflection of the scale image and  $M$  is the distance of the screen from the mirror. Therefore, applying this relation to equation (19) it becomes

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{S}{M} \cdot \frac{b-a}{L} \cdot \frac{I\omega^2 - \tau}{a^3\omega\varphi_0} \left[ 1 - \left( \frac{S}{2M\varphi_0} \right)^2 \right]^{-1/2} e^{-3d/R}. \quad (20)$$

Also, if  $\tau$  is very small compared with  $I\omega^2$ , it can be neglected without any appreciable error, and equation (20) becomes

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{S}{M} \cdot \frac{b-a}{L} \cdot \frac{I\omega}{a^3\varphi_0} \left[ 1 - \left( \frac{S}{2M\varphi_0} \right)^2 \right]^{-1/2} e^{-3d/R}. \quad (21)$$

Now, it follows from equation (5) that

$$\left| \frac{\theta'}{\varphi_0} \right|^2 = \omega^2 e^{3(d-y)/R} \frac{H_1}{H}, \quad (22)$$

where

$$H_1 = [e^{3(d-y)/R} + \gamma'^2 \omega^2 (d+y)^2] \quad \text{and} \quad |\theta'|_{-d} = \omega \varphi_0(\psi)_{-d},$$

an equation which has been derived before, i.e. equation (17).

Also,

$$\left| \frac{d\theta'}{dy} \right|^2 = \omega^2 \varphi_0^2 e^{3(d-y)/R} (C^2 + D^2) \times \left\{ \frac{\left[ \gamma' \omega + \left( 2CD - \frac{3\gamma' \omega}{2R} \right) (d+y) \right]^2 + \frac{9}{4R} \gamma'^2 \omega^2 (d+y)^2}{H} \right\} \quad (23)$$

and

$$\left| \frac{d\theta'}{dy} \right|_{y=-d}^2 = \frac{\gamma'^2 \omega^4 \varphi_0^2 e^{6d/R}}{H}. \quad (24)$$

Equations (22) and (23) are much simpler than equations (6) and (10), and agree with them for all values of  $\eta > 1$ .

The function  $\psi(n)$  depends on four parameters ( $\varrho$ ,  $\eta$ ,  $d$ , and  $\tau$ ) which can take different values. An example of the variation of the theoretical ( $n$ ,  $\psi_{-d}$ )-

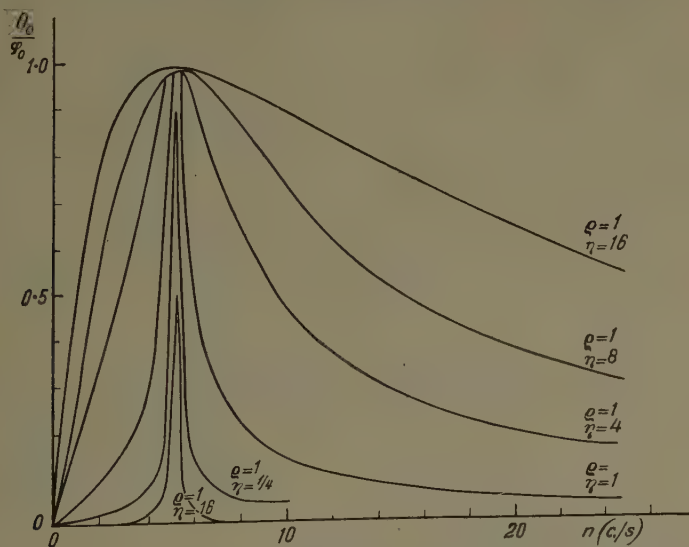


Figure 2

The variation of  $\frac{\theta_0}{\varphi_0}(n)$  with  $\eta$ .



curves with  $\eta$  for viscous liquids ( $\eta = 16, 8, 4, 1/4$ , and  $1/16$ ) the same  $\rho, d$ , and  $\tau$  is given; see Figure 2. The curves show a peak in  $\psi_{-d}$  not exceeding unity, at a value of  $n$  almost exactly equal to the frequency  $n_0$  of free oscillation of the inner cylinder and the torsion wire (defined by  $\gamma' = 0$ ).

As the viscosity decreases the peak value of  $\psi_{-d}$  decreases and appears to be equal to 0.5 for liquids of viscosity  $1/16$ .

Examples of the variation of the theoretical  $[(V-d)/\varphi_0, n]$  with  $\eta$  for the same range of viscosity mentioned above is given in Figure 3. With liquids of low viscosity the peak is sharp; as the viscosity increases it is broadened. This is because for all values of  $n > n_0$  the decrease in  $\psi_{-d}$  with increase of  $n$  is rapid at low viscosity and slight at high viscosity.

Using various values of  $\rho$  ranging from 0.75 to 1.5 g/ml while keeping the other parameters constant, the results of numerical calculations show that the values of  $\psi_{-d}$  for

different values of  $n$  are very little dependent on  $\rho$  as the deviation is quite low.

Now, from equation (18) we find

$$\left(\frac{d\psi_{-d}}{dn}\right) = -e^{3d/R} \frac{2d^2(I\omega^2 - \tau)(I\omega^2 + \tau)}{\pi L^2 a^6 \eta^2 \left[ \omega^2 + \frac{d^2(I\omega^2 - \tau)^2}{\pi^2 L^2 a^6 \eta^2} + \frac{18d^2\omega^2}{R^2} + \frac{6d\omega^2}{R} \right]^{3/2}} \quad (25)$$

and

$$\left(\frac{d\psi_{-d}}{dn}\right)_{n=0} = e^{3d/R} \frac{4\pi^2 L \eta a^3}{(b-a)\tau} \quad (26)$$

or

$$\eta = e^{-3d/R} \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{b-a}{L} \cdot \frac{\tau}{a^3} \left(\frac{d\psi_{-d}}{dn}\right)_{n=0},$$

a result which is independent of  $I$ .

From equation (16) it may be noted that  $\psi_{-d} = 0$  at zero frequency of the outer cylinder, while from equation (26),  $[(d\psi_{-d})/dn]_{n=0}$  has a definite value. The value of  $[(d\psi_{-d})/dn]_{n=0}$  could be determined in two ways; first, it may

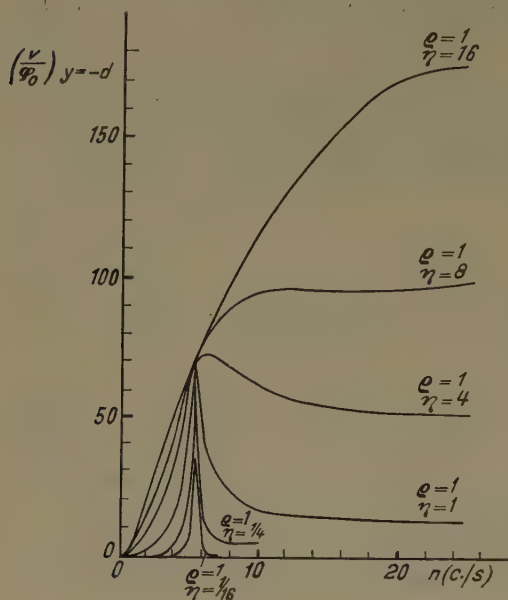


Figure 3

The variation of  $\left(\frac{V}{\varphi_0}\right)_{y=-d}(n)$  with  $\eta$ .

be evaluated as the slope of the tangent to the  $(\psi_{-d}, n)$ -curve at the origin (see Figure 4). This is a less accurate method. The experimental data may be plotted as a graph of  $\psi_{-d}/n$  versus  $n$ . In this graph, example of which is shown in Figure 5,  $(d\psi_{-d}/dn)_{n=0}$  is obtained by extrapolation of the curves at zero frequency. This procedure still does not yield very great precision, but the average of the results obtained by both methods should be closer to the facts than those of one method alone.

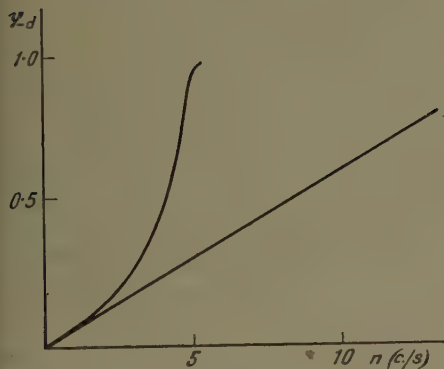


Figure 4  
The variation of  $\psi_{-d}(n)$  for paraffin oil.

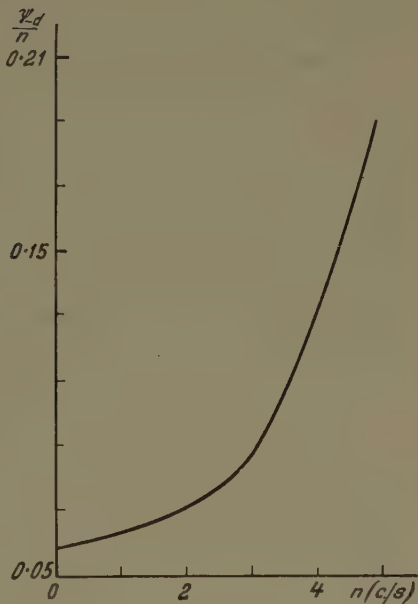


Figure 5  
The variation of  $\left(\frac{\psi_{-d}}{n}\right)(n)$  for paraffin oil.

### Condition of Resonance

If we vary the frequency of the outer cylinder, at a certain frequency there will be resonance between the liquid and the inner cylinder. The condition of resonance is  $d\psi_{-d}/dn = 0$ .

Therefore, it follows from equation (25) that,

$$I \omega_r^2 - \tau = 0 \quad \text{or} \quad n_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\tau}{I}} = n_0,$$

i.e. resonance occurs at a certain frequency  $n_r$  almost exactly equal to the frequency  $n_0$  of free oscillation of the inner cylinder and the torsion wire.

## Experimental Verification

OLDROYD, STRAUBRIDGE, and TOMS have carried out recently precise measurements on liquid paraffin B. P. of density 0.877 g/ml and viscosity 1.76 poises at 25°C, and their results agree well with either our equation (16) or (18) [see Figure 1] for all values of  $\theta_0/\varphi_0$ , of  $n$  sufficiently large up to 25 c./s. The agreement suggests that our theory may be regarded as a satisfactory description of the facts for the nonelastic fluids and justifies as well the neglect of the end effect. Also, the values of  $\eta$  calculated from (24) using different values of  $(d\psi_{-d}/dn)_{n=0}$ , which indicates the limitation in our proposed theory.

Table

$\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_{n=0}$			$\eta$ in g/cm/s at 25° C		Per cent deviation
Slope of $\lg t$	Extrapolation	Mean	Calculated	From tables	
0.061	0.059	0.060	1.756	1.76	0.23%

## Acknowledgment

The first author would like to express his thanks and gratitude for the extreme kindness, encouragement and advice given to him by Prof. H. T. FLINT during his stay in England.

Also the discussions with Prof. M. A. EL-SHERBINI are greatly acknowledged.

## Zusammenfassung

Die Arbeit gibt eine theoretische Behandlung der periodischen Bewegung einer Flüssigkeit in der Lücke zwischen zwei koaxialen Zylindern wieder. Ist der innere Zylinder an einem Torsionsdraht aufgehängt, wobei der äussere Zylinder eine erzwungene Schwingung ausführt, wird eine Berechnung der uniformen Schwingung des inneren Zylinders möglich. Die experimentellen Daten sind gut mit der Theorie vereinbar. Die Kurven, welche die Abhängigkeit von  $\theta_0/\varphi_0$  und  $V_{-d}/\varphi_0$  von der Schwingungszahl darstellen, sind für verschiedene Werte der Konstanten der Flüssigkeit und des Apparates gezeichnet, wobei  $\theta_0$  die Schwingungsamplitude des inneren Zylinders,  $\varphi_0$  diejenige des äusseren Zylinders und  $V_{-d}$  die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Nähe der krummen Oberfläche des inneren Zylinders bedeutet. Im weiteren wird der Einfluss der Dichte diskutiert; schliesslich werden die Resonanzbedingungen zwischen der Flüssigkeit und dem inneren Zylinder aufgestellt.

(Received: October 31, 1953.)

# Untersuchungen über Elektronenströmungen

Von JOHANNES MÜLLER, Berlin

II. Teil<sup>1)</sup>

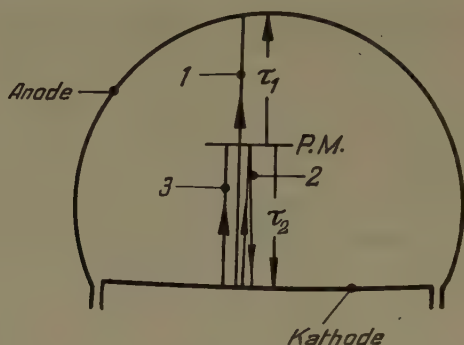
## II. Strömungen mit Anfangssteuerung

Es sollen ausser  $m$  Einzelströmungen, wie zu Beginn des Abschnitts I, noch zusätzlich eine Strömung mit schmalen konstantem Spektrum, charakterisiert durch  $c = di/dU_e$ , bestehen, deren Potentialverlauf längs der Strömung ein Minimum aufweist. Elektronen mit Geschwindigkeiten unterhalb einer gewissen kritischen Geschwindigkeit werden dann in der Nähe des Potentialminimums umkehren. Da die statische Feldstärke im Potentialminimum Null ist, besitzen die kritischen Elektronen eine unendlich lange Laufzeit. Die auch nur infinitesimal hinsichtlich der Anfangsgeschwindigkeit verschiedenen anderen Elektronen zeigen derartig unterschiedliche Laufzeiten, dass auch bei dem schmalen Spektrum kein einheitlicher Laufzeitwinkel existiert. Um zu einwandfreien mathematischen Ansätzen zu gelangen, wird im Potentialminimum eine kleine statische negative Hilfsladung hinzugefügt. Die Feldstärke im Potentialminimum wird dann nicht Null, und die Laufzeiten bleiben endlich, so dass jeder Gruppe von Elektronen, den weiterlaufenden und den umkehrenden, innerhalb des schmalen Spektrums definierte Laufzeiten zugeordnet werden können. Die räumliche Lage des Potentialminimums bleibt dabei unverändert. Es werden in Zusammenhang mit der Zusatzströmung drei Strömungen bezeichnet (Figur 3). Strömung 1 betrifft die weiterlaufenden, Strömung 2 die umkehrenden Elektronen. Die Laufzeiten, gerechnet vom Potentialminimum bis zum Ende dieser Strömungen, betragen  $\tau_1$  und  $\tau_2$ . Strömung 3 endet im Raum am Potentialminimum mit Laufzeit  $\tau_2$ . Sie dient dazu, die Wechselvoltgeschwindigkeit zu ermitteln, die am Potentialminimum die Stromaufteilung bestimmt. Angenommen, es würde keine Stromaufteilung zustande kommen, so ist der Einfluss der Zusatzströmung auf die Gesamtvorgänge – wegen der geringen Breite des Spektrums, das von der Ordnung der längs Strömung 3 auftretenden Wechselvoltgeschwindigkeit ist – zu vernachlässigen. Lässt man die Stromaufteilung zustande kommen, so entsteht durch den beispielsweise vermehrten Konvektionsstrom bei Strömung 1 und den um den gleichen Wert verminderten Konvektionsstrom bei Strömung 2 eine Wirkung von anderer Größenordnung. Die beiden Konvektionswechselströme beginnen am Poten-

<sup>1)</sup> Erster Teil der Arbeit siehe ZAMP 5, Fasc. 3, 203 (1954).



tialminimum. Die Wirkung ist aber die gleiche, wenn sie um die Zeit  $\tau_2$  früher am Anfang der Strömungen 1 und 2 beginnen, da sie sich auf dieser Wegstrecke kompensieren. Drei von den  $m$  Einzelströmungen werden abgezweigt und ihnen der gleiche Weg wie den bezeichneten Strömungen 1, 2 und 3 gegeben. Der Zusammenhang zwischen den End- und Anfangsmodulationen der  $m$  Strömungen wird in gleicher Weise wie in I durch die Matrix  $\mathfrak{A}$  geregelt (15). Die Koeffizienten sind jedoch nicht identisch, sondern verstehen sich hier mit Rückwirkung durch die bei der Stromaufteilungssteuerung entstehenden Konvek-



Figur 3

Die drei Elektronenwege einer Stromaufteilungssteuerung.

tionswechselströme längs Strömung 1 und 2. Sei  $\mathfrak{B}^{(3)}$  die Wechselvoltgeschwindigkeit am Ende von 3, so ist für die Stromaufteilung die reine Feldmodulation längs 3, das heisst  $\mathfrak{B}^{(3)} - \mathfrak{B}_3 e^{-j\omega\tau_2}$  verantwortlich. Damit betragen die Konvektionswechselströme, direkt entstanden durch Stromaufteilungssteuerung, am Ende von 1 und 2:

$$\frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}^{(3)} - \mathfrak{B}_3 e^{-j\omega\tau_2}] e^{-j\omega\tau_1}; \quad -\frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}^{(3)} - \mathfrak{B}_3 e^{-j\omega\tau_2}] e^{-j\omega\tau_2}. \quad (125)$$

Diese Endströme zusammen mit den Endmodulationen der  $m$  Strömungen ergeben das Verhalten der Gesamtströmungen, das durch eine Matrix  $\mathfrak{A}_g$  beschrieben wird:

$$\mathfrak{A}_g = E_{16}(c_1) E_{36}(-c_2) \mathfrak{A} + \mathfrak{D}_{16}(-c_{12}) + \mathfrak{D}_{36}(c_{22}), \quad (126)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{di}{dU_e} e^{-j\omega\tau_1}; & c_{12} &= \frac{di}{dU_e} e^{-j\omega(\tau_1+\tau_2)}; \\ c_2 &= \frac{di}{dU_e} e^{-j\omega\tau_2}; & c_{22} &= \frac{di}{dU_e} e^{-j\omega 2\tau_2}. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

$E_{16}(c_1)$  bzw.  $\mathfrak{D}_{16}(-c_{12})$  ist die in Zeile 1, Spalte 6, mit dem Element  $c_1$  bzw.  $-c_{12}$  erweiterte Einheitsmatrix bzw. Nullmatrix. Die Wechselvoltgeschwindig-

keiten der abgezweigten Strömungen 1 und 2 betragen  $\mathfrak{B}^{(1)}$  und  $\mathfrak{B}^{(2)}$ . Die Endströme der Stromaufteilungssteuerung besitzen demgegenüber eine andere Wechselvoltgeschwindigkeit, da nur die Feldmodulation für die Stromaufteilungssteuerung wirksam ist, und zwar:

$$\mathfrak{B}^{(1)} - \mathfrak{B}_1 e^{-j \omega [\tau_1 + \tau_2]}; \quad \mathfrak{B}^{(2)} - \mathfrak{B}_2 e^{-j \omega 2 \tau_2} . \tag{128}$$

Aus diesem Grund wird nicht mit  $\mathfrak{U}_g$  bei der Aufstellung der Wirkleistungsbilanz gerechnet. Die insgesamt abgegebene muss gleich der zugeführten Wirkleistung sein:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} \left[ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{B}^{(\nu)} \mathfrak{L}^{(\nu)*} + [\mathfrak{B}^{(1)} - \mathfrak{B}_1 e^{-j \omega [\tau_1 + \tau_2]}] \left[ \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}^{(3)} - \mathfrak{B}_3 e^{-j \omega \tau_2}] e^{-j \omega \tau_1} \right]^* \right. \\ \left. + [\mathfrak{B}^{(2)} - \mathfrak{B}_2 e^{-j \omega 2 \tau_2}] \left[ \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}^{(3)} - \mathfrak{B}_3 e^{-j \omega \tau_2}] e^{-j \omega \tau_2} \right]^* \right] \\ = \text{Re} \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{B}_\nu \mathfrak{L}_\nu^* . \end{aligned} \right\} \tag{129}$$

Wird zu dem komplexen Wert der Leistung der konjugiert komplexe addiert, so lässt sich die doppelte Wirkleistung in folgende Matrixform bringen:

$$\left. \begin{aligned} & (\mathfrak{L}^{(1)} \mathfrak{B}^{(1)} \dots) \begin{bmatrix} E_{25}(c_1^*) & E_{45}(-c_2^*) & E_{61}(c_1) & E_{63}(-c_2) \end{bmatrix} \left\| \begin{matrix} \mathfrak{B}^{(1)} \\ \mathfrak{L}^{(1)} \\ \dots \end{matrix} \right\|^* \\ & + (\mathfrak{L}^{(1)} \mathfrak{B}^{(1)} \dots) [\mathfrak{D}_{25}(-c_{12}^*) + \mathfrak{D}_{45}(c_{22}^*) + \mathfrak{D}_{61}(-c_2^*) + \mathfrak{D}_{63}(c_{22}^*)] \left\| \begin{matrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{L}_1 \\ \dots \end{matrix} \right\|^* \\ & + (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) [\mathfrak{D}_{25}(-c_2) + \mathfrak{D}_{45}(c_2) + \mathfrak{D}_{61}(-c_{12}) + \mathfrak{D}_{63}(c_{22})] \left\| \begin{matrix} \mathfrak{B}^{(1)} \\ \mathfrak{L}^{(1)} \\ \dots \end{matrix} \right\|^* \\ & + (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) [\mathfrak{D}_{25}(c) + \mathfrak{D}_{45}(-c) + \mathfrak{D}_{61}(c) + \mathfrak{D}_{63}(-c)] \left\| \begin{matrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{L}_1 \\ \dots \end{matrix} \right\|^* \\ & = (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \left\| \begin{matrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{L}_1 \\ \dots \end{matrix} \right\|^* . \end{aligned} \right\} \tag{130}$$

Mittels (14b) und (17) werden die einreihigen Matrizen der Endmodulationen

eliminiert. Durch Anwendung von Matrizenalgebra erhält man:

$$\bar{\mathfrak{B}}^{*'} \mathfrak{B} = E, \quad (131)$$

$$\mathfrak{B} = \left[ \begin{array}{l} E_{16}(c_1) E_{36}(-c_2) \mathfrak{A} + \mathfrak{D}_{16}(-c_{12}) + \mathfrak{D}_{36}(c_{22}) + \mathfrak{D}_{52}(-c_2) + \mathfrak{D}_{54}(-c_2) \\ \times E_{16}(c) E_{36}(-c) = [\mathfrak{U}_g + \mathfrak{D}_{52}(-c_2) + \mathfrak{D}_{54}(c_2)] E_{16}(c) E_{36}(-c) \end{array} \right] \quad (132)$$

Die links von  $\mathfrak{A}$  stehenden erweiterten Einheitsmatrizen sowie die erweiterten Nullmatrizen in  $\mathfrak{B}$  bewirken nur in den ersten 6 Zeilen der  $\mathfrak{A}$ -Matrix eine Veränderung. Für die Anwendung wichtig ist die Multiplikation mit den rechts von  $\mathfrak{A}$  stehenden erweiterten Einheitsmatrizen. Sie bedeuten, dass Spalte 1 bzw. 3 von  $\mathfrak{A}$  mit  $c$  bzw.  $-c$  multipliziert wird und zur Spalte 6 von  $\mathfrak{A}$  addiert wird. Analog wie in I wird die  $\mathfrak{A}$ -Matrix mit Koeffizienten von zwei Strömungen an zwei Klemmenpaaren erweitert. Es werden nur die vier letzten Zeilen von  $\mathfrak{B}$  und  $\bar{\mathfrak{B}}^*$  angeschrieben.

$$\begin{array}{l} \text{Zeile} \\ 2m+1 \\ 2m+2 \\ 2m+3 \\ 2m+4 \\ \text{von } \mathfrak{B} \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{U}_{1\Omega_1} & \mathfrak{U}_{1\Omega_2} & \mathfrak{U}_{1\Omega_3} & \mathfrak{U}_{1\Omega_4} & \mathfrak{U}_{1\Omega_5} & \mathfrak{U}_{1\Omega_6} + c \mathfrak{U}_{1\Omega_1} - c \mathfrak{U}_{1\Omega_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{U}_{2\Omega_1} & \mathfrak{U}_{2\Omega_2} & \mathfrak{U}_{2\Omega_3} & \mathfrak{U}_{2\Omega_4} & \mathfrak{U}_{2\Omega_5} & \mathfrak{U}_{2\Omega_6} + c \mathfrak{U}_{2\Omega_1} - c \mathfrak{U}_{2\Omega_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right. \begin{array}{cccc} \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & -\mathfrak{U}_{2\Omega_1} & 1 & -\mathfrak{U}_{1\Omega_1} & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & -\mathfrak{U}_{2\Omega_1} & 0 & -\mathfrak{U}_{2\Omega_2} & 1 \end{array} \quad (133)$$

$$\begin{array}{l} \text{Zeile} \\ 2m+1 \\ 2m+2 \\ 2m+3 \\ 2m+4 \\ \text{von } \mathfrak{B}^* \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} \mathfrak{U}_{1\Omega_1} & \mathfrak{U}_{1\Omega_2} & \mathfrak{U}_{1\Omega_3} & \mathfrak{U}_{1\Omega_4} & \mathfrak{U}_{1\Omega_5} & \mathfrak{U}_{1\Omega_6} + c \mathfrak{U}_{1\Omega_1} - c \mathfrak{U}_{1\Omega_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{U}_{2\Omega_1} & \mathfrak{U}_{2\Omega_2} & \mathfrak{U}_{2\Omega_3} & \mathfrak{U}_{2\Omega_4} & \mathfrak{U}_{2\Omega_5} & \mathfrak{U}_{2\Omega_6} + c \mathfrak{U}_{2\Omega_1} - c \mathfrak{U}_{2\Omega_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right. \begin{array}{cccc} \dots & 1 & -\mathfrak{U}_{1\Omega_1} & 0 & -\mathfrak{U}_{1\Omega_2} \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & -\mathfrak{U}_{2\Omega_1} & 1 & -\mathfrak{U}_{2\Omega_2} \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (134)$$

Multiplikation verschiedener Zeilen muss wegen (131) Null ergeben. Zeile  $2m+2$  von  $\mathfrak{B} \times$  Zeile  $2m+3$  von  $\bar{\mathfrak{B}}^*$  liefert die wechselseitigen Impedanzen für die Klemmenpaare 1 und 2:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{1\Omega_2} + \mathfrak{U}_{2\Omega_1}^* &= \mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^* = \sum_{\nu=1}^m \left[ \mathfrak{U}_{1\Omega_\nu} \mathfrak{U}_{2\Omega_\nu}^* + \mathfrak{U}_{1\Omega_\nu} \mathfrak{U}_{2\Omega_\nu}^* \right] \\ &+ c \mathfrak{U}_{1\Omega_1} [\mathfrak{U}_{2\Omega_1}^* - \mathfrak{U}_{2\Omega_2}^*] + c [\mathfrak{U}_{1\Omega_1} - \mathfrak{U}_{1\Omega_2}] \mathfrak{U}_{2\Omega_1}^* \end{aligned} \quad (135)$$

$c = di/dU_e = 0$  (keine Stromaufteilungssteuerung ergibt (30), ebenso wenn das Potentialminimum an den Anfang von 1 und 2 rückt ( $\tau_2 = 0$ ,  $\mathfrak{U}_{\kappa\Omega_2} = \mathfrak{U}_{\kappa\Omega_2} = 0$ )). Die quadratische Form der Impedanzen ist auch in den durch Stromaufteilungssteuerung bewirkten Termen so aufgebaut, dass nur Koeffizienten, die die

Steuerung selbst betreffen, vorkommen. Wandert das Potentialminimum auf die Anode ( $\tau_1 = 0$ ), so wird  $\mathfrak{U}_{\Omega_2} = \mathfrak{U}_{\Omega_1}$  und nach (44a)  $\mathfrak{U}_{\Omega_2} - \mathfrak{U}_{\Omega_1} = \mathfrak{U}_{\Omega_{II}} e^{-j\omega\tau_2}$ . Dabei wirkt  $\mathfrak{Q}_{II}$ -Modulation längs 3 oder 1 in umgekehrter Richtung wie  $\mathfrak{Q}_1$ -Modulation. Bei Übergang zum Leitwertersatzbild ( $\mathfrak{U}, \mathfrak{R}$  ersetzt durch  $\mathfrak{Z}, \mathfrak{S}$ ) und Benutzung von (44b) folgt für den Wirkleitwert durch Stromaufteilung bei verschwindender Raumladung aus (135):

$$S_{II} = \operatorname{Re} c \mathfrak{Z}_{\Omega_{II}}^2. \quad (135a)$$

In den Gliedern mit  $c$  in (135) fehlen Koeffizienten durch  $\mathfrak{B}$ -Modulation. Die abgezweigten drei Strömungen können gleichstromlos sein, das heisst, wieder entfernt werden. Bemerkenswert sind die Koeffizienten  $\mathfrak{U}_{1\Omega_2}$  und  $\mathfrak{U}_{2\Omega_2}$ . Bei ihnen endet ein Konvektionswechselstrom im Raum am Potentialminimum. Bei einer anderen Darstellung können derartige Koeffizienten vermieden werden. Zu diesem Zweck werden die Koeffizienten in (135) ersetzt durch die Koeffizienten, bei denen die Stromaufteilungssteuerung unwirksam ist und die mit denen von I identisch sind. Hier in II erhalten sie den Index 0. Sei  $\mathfrak{X}$  eine steuernde Anfangsmodulation,  $\mathfrak{Y}$  eine gesteuerte Modulation und  $\mathfrak{B}_{3\mathfrak{X}}$  der Koeffizient, wie er bei voller Rückwirkung  $c \neq 0$  für den Endpunkt von 3 und damit für die dabei auftretende Stromaufteilungssteuerung massgebend ist, so gilt:

$$\mathfrak{Y}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Y}_{0\mathfrak{X}} + c \mathfrak{B}_{3\mathfrak{X}} [\mathfrak{Y}_{0\Omega_I} - \mathfrak{Y}_{0\Omega_{II}}] = \mathfrak{Y}_{0\mathfrak{X}} + c \mathfrak{B}_{3\mathfrak{X}} e^{j\omega\tau_2} [\mathfrak{Y}_{0\Omega_1} - \mathfrak{Y}_{0\Omega_2}]. \quad (136)$$

$\mathfrak{Y}_{0\Omega_I}$  bzw.  $\mathfrak{Y}_{0\Omega_{II}}$  stellen die Koeffizienten dar, die durch eine  $\mathfrak{Q}$ -Modulation, beginnend am Potentialminimum, das heisst im Teilstück 2 der Strömungen 1 bzw. 2 zustande kommen. Da die Teilstücke 1 der beiden Strömungen identisch sind, so folgt die weitere Umformung in (136) unter Benutzung von (44a) ( $\tau_{1_1} = \tau_{2_1} = \tau_2$ ).  $\mathfrak{Y}_{0\Omega_1}$  bzw.  $\mathfrak{Y}_{0\Omega_2}$  beziehen sich auf eine am Anfang der Strömungen 1 bzw. 2 beginnende  $\mathfrak{Q}$ -Modulation. Wird (136) auf die End- $\mathfrak{B}$ -Modulation an 3 angewendet und nach  $\mathfrak{B}_{3\mathfrak{X}}$  aufgelöst, so folgt:

$$\mathfrak{B}_{3\mathfrak{X}} = \frac{\mathfrak{B}_{30\mathfrak{X}}}{1 + c_2^* [\mathfrak{B}_{30\Omega_2} - \mathfrak{B}_{30\Omega_1}]}. \quad (137)$$

(137) in (136) eingesetzt,  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{U}_{\mathfrak{X}}$  gewählt und  $c [\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\Omega_1} - \mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\Omega_2}]$  gebildet, ergibt:

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\mathfrak{X}} = \mathfrak{U}_{\mathfrak{X}0\mathfrak{X}} + \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \mathfrak{B}_{30\mathfrak{X}}; \quad \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} = \frac{c_2^* [\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}0\Omega_1} - \mathfrak{U}_{\mathfrak{X}0\Omega_2}]}{1 + c_2^* [\mathfrak{B}_{30\Omega_2} - \mathfrak{B}_{30\Omega_1}]}. \quad (138)$$

$$c [\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\Omega_1} - \mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\Omega_2}] = \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} e^{-j\omega\tau_2}. \quad (139)$$

(138) und (139) in der rechten Seite von (135) eingesetzt, ergibt vier Glieder



mit Faktoren  $\mathfrak{F}_1$ ,  $\mathfrak{F}_2^*$ ,  $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2^*$  und ohne  $\mathfrak{F}$ , die der Reihe nach angeschrieben werden.

$$\sum_{\nu=4}^m \left[ \mathfrak{B}_{30\Omega_\nu} \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{B}_{30\Omega_\nu}^* \right] + \mathfrak{B}_{30\Omega_3} e^{j\omega\tau_2} + \mathfrak{B}_{30\Omega_3}^* e^{-j\omega\tau_2} = 0, \quad (140)$$

$$\sum_{\nu=4}^m \left[ \mathfrak{U}_{20\mathfrak{B}_\nu}^* \mathfrak{B}_{30\Omega_\nu} + \mathfrak{U}_{20\Omega_\nu}^* \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_\nu} \right] + \mathfrak{U}_{20\Omega_3}^* e^{-j\omega\tau_2} = \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_2}, \quad (141)$$

$$\sum_{\nu=4}^m \left[ \mathfrak{U}_{10\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{B}_{30\Omega_\nu}^* + \mathfrak{U}_{10\Omega_\nu} \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_\nu}^* \right] + \mathfrak{U}_{10\Omega_3} e^{j\omega\tau_2} = \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_1}^*, \quad (142)$$

$$\sum_{\nu=4}^m \left[ \mathfrak{U}_{10\Omega_\nu} \mathfrak{U}_{20\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{U}_{10\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{U}_{20\Omega_\nu}^* \right] = \mathfrak{U}_{10\mathfrak{B}_2} + \mathfrak{U}_{20\mathfrak{B}_1}^*. \quad (143)$$

Wenn beachtet wird, dass die ersten drei Strömungen gleichstromlos sind (alle vorkommenden Koeffizienten mit Steuerung durch  $\mathfrak{B}_1$ ,  $\mathfrak{B}_2$ ,  $\mathfrak{B}_3$  verschwinden bis auf  $\mathfrak{B}_{3\mathfrak{B}_3} = e^{-j\omega\tau_2}$ ) ergeben sich die rechten Seiten von (140) bis (143) aus (26) für  $\mu = \sigma = 30$ , aus (33) für  $\mu = 30$ , Index 1 durch 2 ersetzt, aus (33) für  $\mu = 30$  und aus (30). Damit nimmt (135) folgende Form an:

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_2} + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}_1}^* = \mathfrak{U}_{10\mathfrak{B}_2} + \mathfrak{F}_1 \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_2} + \mathfrak{U}_{20\mathfrak{B}_1}^* + \mathfrak{F}_2^* \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_1}^*. \quad (144)$$

Dieses Ergebnis, dessen Zustandekommen aus den Beziehungen von I hiermit gezeigt ist, kann unmittelbar aus (138) gewonnen werden.  $\mathfrak{F}_1$  bzw.  $\mathfrak{F}_2$  (138) enthält keine Koeffizienten, die sich auf im Raum endende Strömungen beziehen.  $\mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_1}$  und  $\mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_2}$  stellen jedoch noch solche Koeffizienten dar. Dabei endet aber kein Konvektionswechselstrom im Raum wie in (135), sondern es wird nur die Wechselvoltgeschwindigkeit, die ein Elektron längs des Weges 3 am Endpunkt von 3 erhält, benötigt. Wegen des Aufbaus der Endumformung von (136) kann der Wechselvoltgeschwindigkeit  $\mathfrak{B}_{3x} e^{j\omega\tau_2}$  eine physikalische Bedeutung gegeben werden. Vermindert man die statische kritische Anfangsvoltgeschwindigkeit um  $\mathfrak{B}_{3x} e^{j\omega\tau_2}$ , so wird dadurch die Strömung mit dem Spektrum am Anfang in zwei Teile geteilt, die die Stromaufteilung nach der Zeit  $\tau_2$  am Potentialminimum bestimmen. Damit ist jeder Koeffizient einer im Raum endenden Strömung vermieden. Für die Anwendungen wird aber trotzdem (135) benutzt, da hieraus ein unmittelbarer Zusammenhang der Impedanzen mit Emissionsschwankungen gefunden wird.

Die zwei zusätzlichen Ausdrücke in (135) stellen den Einfluss nur einer einzigen Stromaufteilungssteuerung dar. Wenn wie bei Anordnungen, bei denen alle Elektroden emittieren, in beiden Richtungen eine Stromaufteilungssteuerung stattfindet und wenn weitere Stromfäden mit Potentialminimum vor-

handen sind, tritt an die Stelle der einzelnen Ausdrücke eine Summe von der Form:

$$\sum_{\sigma=1}^{\lambda} \left( \frac{di}{dU_e} \right)_{\sigma} \left[ u_{1\Omega_{\sigma 3}} [u_{2\Omega_{\sigma 1}}^* - u_{2\Omega_{\sigma 2}}^*] + [u_{1\Omega_{\sigma 1}} - u_{1\Omega_{\sigma 2}}] u_{2\Omega_{\sigma 3}}^* \right]. \quad [145]$$

Index  $\sigma$  umfasst je drei Strömungen.  $\lambda$  ist die Gesamtzahl der Stromaufteilungssteuerungen.

Unter Benutzung der Differentialbeziehung (54) erhält man für die wechselseitigen Impedanzen aus (135) bei einem kontinuierlichen Geschwindigkeitspektrum in zunächst einem Stromfaden mit einer Stromaufteilungssteuerung:

$$\Re_{12} + \Re_{21}^* = \int_{U_u}^{U_o} \frac{di_v}{dU_v} d[u_{1\Omega_v} u_{2\Omega_v}^*] + c_k [u_{1\Omega_3} [u_{2\Omega_1}^* - u_{2\Omega_2}^*] + [u_{1\Omega_1} - u_{1\Omega_2}] u_{2\Omega_3}^*]. \quad (146)$$

Die Integration zerfällt in zwei Teile, da sich die Koeffizienten bei der kritischen Anfangsvoltgeschwindigkeit  $U_k$  sprunghaft ändern. Durch partielle Integration folgt:

$$\left. \begin{aligned} \Re_{12} + \Re_{21}^* &= \left[ \frac{di}{dU_e} \right]_o u_{1\Omega_o} u_{2\Omega_o}^* - \left[ \frac{di}{dU_e} \right]_k [u_{1\Omega_1} u_{2\Omega_1}^* - u_{1\Omega_2} u_{2\Omega_2}^*] \\ &\quad - \left[ \frac{di}{dU_e} \right]_u u_{1\Omega_u} u_{2\Omega_u}^* - \int_{U_u}^{U_o} \frac{d^2 i_v}{dU_v^2} dU_v u_{1\Omega_v} u_{2\Omega_v}^* \\ &\quad + \left[ \frac{di}{dU_e} \right]_k [u_{1\Omega_3} [u_{2\Omega_1}^* - u_{2\Omega_2}^*] + [u_{1\Omega_1} - u_{1\Omega_2}] u_{2\Omega_3}^*]. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Eine Zusammenfassung der Glieder mit  $c_k = [di/dU_e]_k$  unter Benutzung von (44a) ergibt einen Ausdruck, dessen Koeffizienten nur von  $\Omega$ -Modulationen, beginnend am Potentialminimum, abhängen. Aus (147) wird:

$$\left. \begin{aligned} \Re_{12} + \Re_{21}^* &= c_o u_{1\Omega_o} u_{2\Omega_o}^* - c_k [u_{1\Omega_I} u_{2\Omega_I}^* - u_{1\Omega_{II}} u_{2\Omega_{II}}^*] - c_u u_{1\Omega_u} u_{2\Omega_u}^* \\ &\quad - \int_{U_u}^{U_o} \frac{d^2 i_v}{dU_v^2} dU_v u_{1\Omega_v} u_{2\Omega_v}^* \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

$u_{1\Omega_I}$   $\Omega_I$  bzw.  $u_{1\Omega_{II}}$   $\Omega_{II}$  sind die am Klemmenpaar 1 induzierten Leerlaufspannungen, herrührend von einer  $\Omega$ -Modulation, beginnend im Potentialminimum in Richtung Endpunkt Strömung 1 bzw. 2. Bei einem konstanten Spektrum ( $c_o = c_u = c_k$ ) entfällt das Integral wegen  $d^2 i_v / dU_v^2 = 0$ . Bei einem exponentiellen Spektrum entfällt das Glied mit  $c_o$  wegen  $c_o = 0$  für  $U_o = \infty$  und das Glied mit  $c_u$

wegen  $u_{1\Omega_u} = u_{2\Omega_u} = 0$ , da die Elektronen mit  $U_u = 0$  keine Wegstrecke innerhalb des elektromagnetischen Hohlraums zurücklegen. Es verbleibt wegen

$$\frac{d^2 i_v}{dU_v^2} = -\frac{e}{kT} \cdot \frac{di_v}{dU_v} \quad (107)$$

$$\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^* = -c_k \left[ u_{1\Omega_I} u_{2\Omega_I}^* - u_{1\Omega_{II}} u_{2\Omega_{II}}^* \right] + \int_0^\infty \frac{e}{kT} di_v u_{1\Omega_v} u_{2\Omega_v}^* \quad (149)$$

Wenn an beiden Enden des Stromfadens ein Exponentialspektrum (unterschieden durch Index 1 und 2) emittiert wird und da wegen der gleichen geometrischen Bahn die Verknüpfungen  $u_{\times\Omega_{I_1}} = u_{\times\Omega_{II_2}}$  und  $u_{\times\Omega_{II_1}} = u_{\times\Omega_{I_2}}$  bestehen, so folgt mit (145):

$$\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^* = -[c_{k_1} - c_{k_2}] \left[ u_{1\Omega_{I_1}} u_{2\Omega_{I_1}}^* - u_{1\Omega_{II_1}} u_{2\Omega_{II_1}}^* \right] - \sum_{\sigma=1}^2 \int_0^\infty \left[ \frac{e}{kT} di_v u_{1\Omega_v} u_{2\Omega_v}^* \right]_\sigma \quad (150)$$

Dabei ist:

$$c_{k_1} = \frac{2e i_1}{kT_1}, \quad c_{k_2} = \frac{2e i_2}{kT_2} \quad (151)$$

$i_1$  und  $i_2$  sind die Gleichstromanteile, die das Potentialminimum in den beiden Richtungen überschreiten. Für einen Stromfaden im thermischen Gleichgewicht ( $T_1 = T_2 = T$ ) sind die beiden Ströme  $i_1, i_2$  gleich, da dann in bezug auf den mittleren Energietransport keine Richtung ausgezeichnet ist. Verschiedene Austrittsarbeiten an den beiden Enden des Stromfadens sind dabei mit berücksichtigt. Es entfällt dann in (150) das Glied mit  $[c_{k_1} - c_{k_2}]$ . Wird (150) mit  $2kT$  multipliziert und für  $q$  Stromfäden, wobei in jedem einzelnen die Bedingungen für ein thermisches Gleichgewicht erfüllt sind, angeschrieben, so folgt:

$$2kT [\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^*] = \sum_{\sigma=1}^{2q} \int_0^\infty \left[ 2e di_v u_{1\Omega_v} u_{2\Omega_v}^* \right]_\sigma \quad (152)$$

Für den Wirkwiderstand an einem Klemmenpaar ergibt sich:

$$4kTR_{11} = \sum_{\sigma=1}^{2q} \int_0^\infty \left[ 2e di_v u_{1\Omega_v} u_{1\Omega_v}^* \right]_\sigma \quad (153)$$

Die rechte Seite von (153) stellt nichts anderes als das Schwankungsquadrat der am Klemmenpaar 1 durch die Emissionsschwankungen entstehenden Leerlaufspannung dar.

Unabhängig von einem speziellen Verlauf der Koeffizienten in Abhängigkeit von Anfangsgeschwindigkeit, Frequenz usf. ergibt sich eine derartige Bezie-

hung nur bei einem Exponentialspektrum. Der Wirkwiderstand ist auch stets positiv, wie dies mit Rücksicht auf den zweiten Wärmehauptsatz bei einem Widerstand mit inneren Schwankungsvorgängen notwendig ist. Die mittels thermodynamischer Überlegungen von NYQUIST<sup>1)</sup> aufgestellte Rauschformel für einen Widerstand ist in (153) unter folgenden Voraussetzungen abgeleitet: Verschwindende Quanteneinflüsse, für hohe Frequenzen im Sinne grosser Laufzeitwinkel, mit Berücksichtigung der Raumladung im elektromagnetischen Feld und relativistischer Massenveränderlichkeit, jedoch nur bei reiner Längssteuerung. Zusammenhänge zwischen korpuskularen und thermischen Schwankungen bei beliebiger Steuerung und Raumladung im Hochvakuum jedoch bei niedrigen Frequenzen im Sinne verschwindender Laufzeitwinkel sind von SCHOTTKY<sup>2)</sup> und SPENKE gefunden worden. Eine direkte Ableitung der Nyquist-Formel für metallische Leiter wurde von BAKKER<sup>3)</sup> bei niedrigen Frequenzen und von SPENKE<sup>4)</sup> auch bei hohen Laufzeitwinkeln angegeben.

Zur Diskussion der Eigenschaften von thermisch nicht im Gleichgewicht befindlichen Anordnungen werde auf den Fall eines Stromfadens mit einem Exponentialspektrum und einer Stromaufteilungssteuerung zurückgegangen. Wird (149) durch Vertauschung von  $\mathfrak{U}$  mit  $\mathfrak{J}$ ,  $\mathfrak{R}$  mit  $\mathfrak{S}$  auf das Leitwertersatzbild bezogen und umgestellt, so folgt:

$$\int_0^{\infty} 2 e d i_{\nu} \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_{\nu}}} \mathfrak{J}_{2_{\mathfrak{Q}_{\nu}}}^* = 2 e i \left[ \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_I}} \mathfrak{J}_{2_{\mathfrak{Q}_I}}^* - \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_{II}}} \mathfrak{J}_{2_{\mathfrak{Q}_{II}}}^* \right] + 2 k T [\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{21}^*] \quad (154)$$

und für ein Klemmenpaar:

$$\int_0^{\infty} 2 e d i_{\nu} \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_{\nu}}} \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_{\nu}}}^* = 2 e i \left[ \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_I}} \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_I}}^* - \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_{II}}} \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_{II}}}^* \right] + 4 k T S_{11}. \quad (155)$$

Rückt das Potentialminimum auf die Kathode (Koeffizienten mit Steuerung durch  $\mathfrak{Q}_{II}$  werden Null), so gehen (154) und (155) über in (116) und (115), da dann  $\mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_I}}$  identisch mit  $\mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{Q}_u}}$  ist. Die Folgerungen, die sich im Anschluss an die Formel (120) für ein Emissionsgebiet ergeben haben und die durch (121) und (122) dargestellt werden, können nunmehr auf den Fall der Anwesenheit von Potentialminima erweitert werden. Die Wirkung der Emissionsschwankungen an der Kathode auf die Schwankungen des Konvektionsstromes der auf Flächen der Begrenzung des Hohlraums auftreffenden Elektronen ist genau so gross, wie wenn in den Potentialminima jedes einzelnen Stromfadens Schwan-

<sup>1)</sup> H. NYQUIST, Phys. Rev. 32, 110 (1928).

<sup>2)</sup> W. SCHOTTKY, Z. Phys. 104, 248 (1937); W. SCHOTTKY und E. SPENKE, Naturwissenschaften 25, 447 (1937).

<sup>3)</sup> C. J. BAKKER, Physica 6, 262 (1939).

<sup>4)</sup> E. SPENKE, Wiss. Veröff. Siemens-Werke 18, 54 (1939).



kungsströme, die dem übergehenden Gleichstrom der betreffenden Stromfäden entsprechen, beginnen würden und sowohl in Richtung Anode  $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}$  als auch in Richtung Kathode  $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}$  in den Strömungen mit den kleinsten Geschwindigkeiten am Potentialminimum vorhanden wären.

Führt man eine wirksame Rauschtemperatur  $T_w$  des Wirkleitwerts  $S_{11}$  ein und ersetzt die linke Seite von (155) durch  $4 k T_w S_{11}$ , so folgt bei positiven  $S_{11}$ :  $T_w \cong T$  für  $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I} \cong \mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}$ . Rückt das Potentialminimum auf die Anode (die Koeffizienten mit Steuerung durch  $\mathfrak{Q}_I$  werden Null), so ist  $S_{11}$  für beliebige Frequenzen stets positiv.

Bei der Bestimmung der Schwankungen für Frequenz Null benötigt man die ersten beiden Glieder der Entwicklung der Koeffizienten  $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}$  und  $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}$  nach der Frequenz. Werden die Wirkungen des im Potentialminimum beginnenden Konvektionswechselstromes  $\mathfrak{Q}_I$  und die am Anfang von  $\mathfrak{Q}_I$  zur Erzielung einer Kontinuität von  $\mathfrak{Q}_I$  anzubringende Wechselladung  $\mathfrak{Q}_I$  auf die Bildung des Koeffizienten  $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}$  getrennt angesetzt, so beginnen beide Entwicklungen mit einem frequenzunabhängigen Glied.

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I} \mathfrak{Q}_I = [a_I + j \omega b_I] \mathfrak{Q}_I + [c + j \omega d] \mathfrak{Q}_I = \left[ a_I + j \omega b_I + \frac{c}{j \omega} + d \right] \mathfrak{Q}_I. \quad (156)$$

Der in (155) benötigte Ausdruck auf der rechten Seite nimmt dann bezüglich seines frequenzunabhängigen Anfangsgliedes die Form an:

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I} \mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}^* - \mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}} \mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}^* = a_I^2 - a_{II}^2 + 2 d [a_I - a_{II}] - 2 c [b_I - b_{II}]. \quad (157)$$

Hierbei sind nur  $a_I$ ,  $a_{II}$  und  $c$  rein statisch bestimmbare Koeffizienten.  $c$  und  $d$  sind für  $\mathfrak{Q}_I$ - oder  $\mathfrak{Q}_{II}$ -Anregung unverändert.

Die Untersuchungen bei Anwesenheit von Potentialminima wurden unter der Annahme gemacht, dass sich in den Potentialminima kleine statische Hilfs-ladungen befinden, um auf eindeutige Laufzeitwinkel für die Stromaufteilungs-steuerungen zu kommen. Es wird nun das Verhalten der Koeffizienten mit Steuerung durch  $\mathfrak{Q}_I$  und  $\mathfrak{Q}_{II}$  bei verschwindender Hilfsladung ermittelt.  $\mathfrak{Q}_I$  bzw.  $\mathfrak{Q}_{II}$  sind eingeprägte Konvektionswechselstromverteilungen, die am statischen Potentialminimum mit einer Wechselladung

$$\mathfrak{Q}_I = \frac{\mathfrak{Q}_I}{j \omega} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{Q}_{II} = \frac{\mathfrak{Q}_{II}}{j \omega}$$

beginnen und in Richtung Anode bzw. Kathode längs der Strömung mit der kleinsten Geschwindigkeit Null im Potentialminimum wirken. Geht die Hilfs-ladung gegen Null, so geht die Laufzeit gegen Unendlich, und der Laufzeit-winkel bei endlicher Frequenz wird unbestimmt. Die Koeffizienten  $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}$  und  $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}$  werden damit phasenmässig unbestimmt. In den abgeleiteten Formeln

für Geschwindigkeitsspektren kommen die Koeffizienten stets in Produkten wie  $\mathfrak{Y}_{1g_I} \mathfrak{Y}_{2g_I}^*$  vor. In diesen Produkten entfällt die Phasenunbestimmtheit, und die Produkte nehmen eindeutige Werte an. Die Ergebnisse bei Systemen im thermischen Gleichgewicht werden von dem Grenzübergang überhaupt nicht betroffen, da die Koeffizienten mit Steuerung durch  $\mathfrak{L}_I$  und  $\mathfrak{L}_{II}$  ausserhalb der Integrale entfallen und innerhalb der Integrale in gleicher Form bei den Schwankungsgrössen wie bei den Impedanzen vorkommen.

Aus der am Anfang der Arbeit aufgestellten Leistungsbilanz geht hervor, dass bei Längssteuerung in erster Näherung der Wirkleistungsumsatz sich nur auf die Wechselgrössen bezieht. Eine Veränderung der mittleren Voltgeschwindigkeiten der Strömungen wird leistungsmässig durch die Wechselvorgänge nicht gedeckt. Durch dieses Verhalten ist die Längssteuerung vor der Quersteuerung ausgezeichnet. Bei Vorhandensein von Quersteuerung kann bereits in erster Näherung ein Richteffekt der Voltgeschwindigkeiten auftreten, wobei die elektromagnetischen Wechselfelder an der veränderten Gleichstromleistung mitbeteiligt sind. Aus diesem Grund wurde die Behandlung der Längssteuerung gesondert vorgenommen.

### Summary

The laws of conservation of energy and charge are used in a perturbation theory for longitudinal controlled streams of electrons. Space charge, the electromagnetic field and the relativistic change of mass are taken into account. The relations in the classical field are found from a matrix form. Impedances of the streams are used. On terminals they are identical with the impedances of the electronic device. It is shown, how NYQUIST's noise formula can be derived from the shot noise, for a system in thermal equilibrium with potential minimum in the electron streams and high transit time angles. For a system not in thermal equilibrium some noise formulas are presented. A simplification of the calculation of the noise convection currents of the electrons coming at the electrodes can be made. When in all emission points the emission fluctuations are concentrated in the streams with maximal transit time the noise in the convection currents has the same value as the real noise. When a potential minimum is present, the current is important, which passes over the potential minimum. The noise of this current must be concentrated in the streams with maximal transit time beginning in the potential minimum.

(Eingegangen: 26. Juni 1953.)

## Bestimmung der Übergangsfunktion eines Regelkreises aus dessen Frequenzgang

Von HANSRUEDI BÜHLER, Zürich<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

Bei der Untersuchung von Regelproblemen ist ausser der Frage nach der Stabilität auch oft der zeitliche Verlauf des Ausgleichsvorganges sehr wichtig, das heisst, es wird danach gefragt, wie rasch eine Störung ausreguliert wird. Wenn der Frequenzgang in Form einer Gleichung vorliegt, so kann durch Anwendung des Heavisideschen Entwicklungssatzes die Zeitfunktion bestimmt werden. Schon bei relativ einfachen Regulierungen wird dieses Verfahren jedoch mühsam, wenn eine Gleichung hohen Grades in  $p$  aufgelöst werden muss. Wird aber für ein Regelfglied ein gemessener Frequenzgang zugrunde gelegt, so versagt diese Methode ganz.

Anderseits kann aber auch aus dem Real- oder Imaginärteil des Frequenzganges die Übergangsfunktion bestimmt werden, in Form eines Parameterintegrals. Im folgenden wird dieser Weg beschrieben und eine Näherungslösung angegeben, welche die in [1]<sup>2)</sup> angegebene Methode erweitert und für die praktische Durchführung in eine andere Form bringt.

Das hier beschriebene Näherungsverfahren ist in seiner Anwendung nicht nur auf die Regeltechnik beschränkt, sondern kann ebensogut zur Rücktransformation einer Bildfunktion der modifizierten Laplace-Transformation in den Originalbereich herbeigezogen werden.

### 2. Theoretische Grundlagen

Im folgenden wird unter der Laplace-Transformation die modifizierte Form, auch Carson-Transformation genannt, betrachtet, das heisst

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Die Umkehrformel lautet

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp. \quad (2)$$

Wir beschränken uns auf solche Bildfunktionen  $F(p)$ , die einem stabilen Verhalten entsprechen; das heisst, dass  $F(p)$  keine Pole in der positiv reellen Halbebene aufweise. Im allgemeinen ist aber  $F(0) \neq 0$ , so dass der Integrand für  $p = 0$  einen Pol besitzt. Dies lässt sich durch Abspalten von  $F(0)$  vermeiden. Es ist bekanntlich

$$\lim_{p \rightarrow 0} F(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad (3)$$

insofern der Grenzwert rechts überhaupt existiert.

<sup>1)</sup> Maschinenfabrik Oerlikon, Studienbüro.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf Seite 425.

Andererseits ist für  $t > 0$  [2]

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = 1;$$

somit gilt, wenn man (3) in (2) einsetzt,

$$f(\infty) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{F(0)}{p} e^{pt} dp.$$

Subtraktion dieses Ausdruckes von Gleichung (2)

$$f(t) - f(\infty) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{F(p) - F(0)}{p} e^{pt} dp. \quad (4)$$

Der Integrand nimmt nun für  $p = 0$  einen endlichen Wert an. Da längs der imaginären Achse zu integrieren ist, kann man  $p = j\lambda$  setzen. Trennt man  $F(j\lambda)$  auf in Real- und Imaginärteil

$$F(j\lambda) = U(\lambda) + jV(\lambda),$$

so erhält man mit  $e^{j\lambda t} = \cos \lambda t + j \sin \lambda t$

$$f(t) - f(\infty) = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{U(\lambda) - F(0)}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{V(\lambda)}{\lambda} \cos \lambda t \right] d\lambda \\ & - j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{U(\lambda) - F(0)}{\lambda} \cos \lambda t - \frac{V(\lambda)}{\lambda} \sin \lambda t \right] d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Es ist nun für alle praktisch in Frage kommenden Funktionen

$$F(-j\lambda) = U(\lambda) - jV(\lambda),$$

das heisst,  $U(\lambda)$  ist eine gerade,  $V(\lambda)$  eine ungerade Funktion. Es ist zu beachten, dass Gleichung (5) nur für  $t > 0$  gilt. Für  $t < 0$  muss die linke Seite dagegen Null sein, da die Störung ja erst zur Zeit  $t = 0$  eintreten soll. Unter Berücksichtigung dieser beiden Eigenschaften erhält man schliesslich aus Gleichung (5) zwei neue Gleichungen

$$f(t) = F(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\lambda) - F(0)}{\lambda} \sin \lambda t d\lambda, \quad (6a)$$

$$f(t) = F(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\lambda)}{\lambda} \cos \lambda t d\lambda. \quad (6b)$$

Man kann also entweder aus dem Real- oder dem Imaginärteil der Bildfunktion  $F(j\lambda)$  den zeitlichen Verlauf der Originalfunktion berechnen.

Zur Berechnung des Integrals in den Gleichungen (6) wird nun ein Näherungsverfahren entwickelt. Wir setzen zur Abkürzung

$$u(\lambda) = \frac{U(\lambda) - F(0)}{\lambda}, \quad v(\lambda) = \frac{V(\lambda)}{\lambda}.$$



Es soll nun  $u(\lambda)$  bzw.  $v(\lambda)$  durch eine Summe von Hilfsfunktionen  $\varphi_i(\lambda)$  approximiert werden

$$u(\lambda) = \sum_i \varphi_i(\lambda), \quad v(\lambda) = \sum_i \varphi_i(\lambda).$$

Die Funktionen  $\varphi_i(\lambda)$  werden so gewählt, dass sich das Integral

$$I_s = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi_i(\lambda) \sin \lambda t d\lambda \quad \text{bzw.} \quad I_c = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi_i(\lambda) \cos \lambda t d\lambda$$

geschlossen lösen lässt.

Zur Vereinfachung der Rechnung soll noch ein Hilfssatz abgeleitet werden. Es sei für

$$0 < \lambda \leq \lambda_1, \quad \varphi(\lambda) = 0; \quad \lambda_1 < \lambda < \infty, \quad \varphi(\lambda) = \psi(\lambda - \lambda_1),$$

somit wird

$$I_s = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\lambda) \sin \lambda t d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi(\lambda - \lambda_1) \sin \lambda t d\lambda;$$

setzt man nun  $\lambda - \lambda_1 = \lambda^*$  ein und lässt den Stern wieder weg, so folgt

$$I_s = \cos \lambda_1 t \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi(\lambda) \sin \lambda t d\lambda + \sin \lambda_1 t \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi(\lambda) \cos \lambda t d\lambda. \quad (7)$$

Gleichung (7) kann man als «Verschiebungssatz» bezeichnen.

Zur Abkürzung werden nun gesetzt

$$f_s(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi(\lambda) \sin \lambda t d\lambda, \quad f_c(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi(\lambda) \cos \lambda t d\lambda. \quad (8)$$

$f_s(t)$  und  $f_c(t)$  lassen sich zu einem komplexen Ausdruck zusammenfassen und gemeinsam berechnen. Es ist

$$f_c(t) \pm j f_s(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi(\lambda) [\cos \lambda t \pm j \sin \lambda t] d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi(\lambda) e^{\pm j \lambda t} d\lambda. \quad (9)$$

Für einige Funktionen  $\psi(\lambda)$  sind die Integralausdrücke in Gleichung (8) bestimmt worden und in Tabelle 1 zusammengestellt. Ähnliche Integrale wie in Gleichung (9) treten bei der Fourier-Transformation und bei der Berechnung von Frequenzspektren mit Hilfe von Fourier-Integralen auf. Zwar gehen dort die Integrationsgrenzen meistens von  $-\infty \dots +\infty$ . Für die Auswertung solcher Integrale siehe zum Beispiel WAGNER [3].

Somit lassen sich die Gleichungen (6) approximieren für den Realteil

$$f(t) \approx F(0) + \sum_i [f_{s_i}(t) \cos \lambda_{1_i} t + f_{c_i}(t) \sin \lambda_{1_i} t]. \quad (10a)$$

für Geschwindigkeitsspektren kommen die Koeffizienten stets in Produkten wie  $\mathfrak{Y}_{1\omega_1} \mathfrak{Y}_{2\omega_1}^*$  vor. In diesen Produkten entfällt die Phasenunbestimmtheit, und die Produkte nehmen eindeutige Werte an. Die Ergebnisse bei Systemen im thermischen Gleichgewicht werden von dem Grenzübergang überhaupt nicht betroffen, da die Koeffizienten mit Steuerung durch  $\mathfrak{L}_1$  und  $\mathfrak{L}_{II}$  ausserhalb der Integrale entfallen und innerhalb der Integrale in gleicher Form bei den Schwankungsgrössen wie bei den Impedanzen vorkommen.

Aus der am Anfang der Arbeit aufgestellten Leistungsbilanz geht hervor, dass bei Längssteuerung in erster Näherung der Wirkleistungsumsatz sich nur auf die Wechselgrössen bezieht. Eine Veränderung der mittleren Voltgeschwindigkeiten der Strömungen wird leistungsmässig durch die Wechselvorgänge nicht gedeckt. Durch dieses Verhalten ist die Längssteuerung vor der Quersteuerung ausgezeichnet. Bei Vorhandensein von Quersteuerung kann bereits in erster Näherung ein Richteffekt der Voltgeschwindigkeiten auftreten, wobei die elektromagnetischen Wechselfelder an der veränderten Gleichstromleistung mitbeteiligt sind. Aus diesem Grund wurde die Behandlung der Längssteuerung gesondert vorgenommen.

### Summary

The laws of conservation of energy and charge are used in a perturbation theory for longitudinal controlled streams of electrons. Space charge, the electromagnetic field and the relativistic change of mass are taken into account. The relations in the classical field are found from a matrix form. Impedances of the streams are used. On terminals they are identical with the impedances of the electronic device. It is shown, how NYQUIST's noise formula can be derived from the shot noise, for a system in thermal equilibrium with potential minimum in the electron streams and high transit time angles. For a system not in thermal equilibrium some noise formulas are presented. A simplification of the calculation of the noise convection currents of the electrons coming at the electrodes can be made. When in all emission points the emission fluctuations are concentrated in the streams with maximal transit time the noise in the convection currents has the same value as the real noise. When a potential minimum is present, the current is important, which passes over the potential minimum. The noise of this current must be concentrated in the streams with maximal transit time beginning in the potential minimum.

(Eingegangen: 26. Juni 1953.)

Für den Imaginärteil von  $F(\lambda)/\lambda$  lässt sich ganz analog ableiten

$$f(t) \approx F(0) + \sum_i [f_{o_i}(t) \cos \lambda_{1_i} t - f_{s_i}(t) \sin \lambda_{1_i} t]. \quad (10b)$$

### 3. Praktische Durchführung

Für die Beurteilung der Stabilität einer Regelung muss man den Frequenzgang  $F_R(\lambda)$  des offenen Regelkreises berechnen. Zusammen mit dem Störfrequenzgang  $F_o(\lambda)$  bekommt man den Frequenzgang des geschlossenen Kreises aus

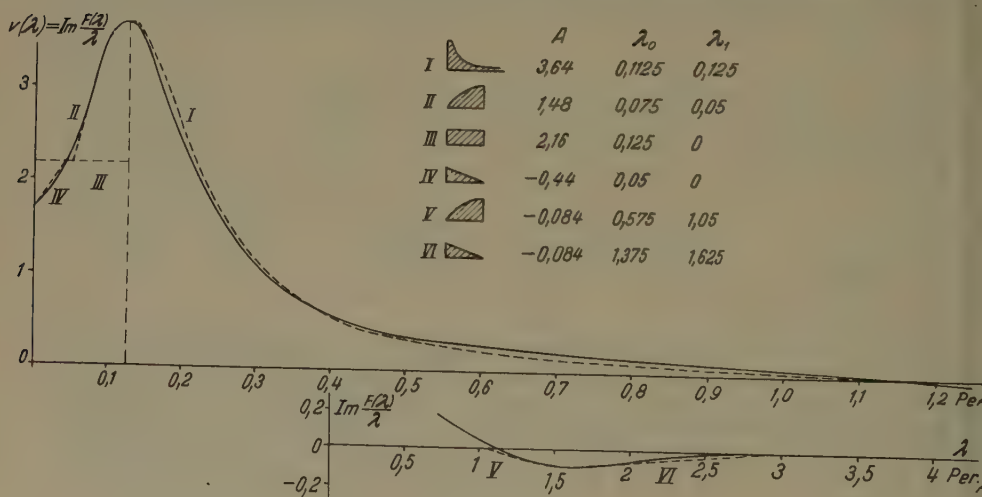
$$F(\lambda) = \frac{F_o(\lambda)}{1 + F_R(\lambda)}.$$

Hat man  $F(\lambda)$  bestimmt, so muss  $F(\lambda)/\lambda$  in Real- und Imaginärteil getrennt werden. Zur weitem Rechnung wird man vorteilhaft denjenigen Teil verwenden, der schneller konvergiert. Diesen sucht man dann mit möglichst wenig der in Tabelle 1 angegebenen Hilfsfunktionen  $\varphi(\lambda)$  zu approximieren.

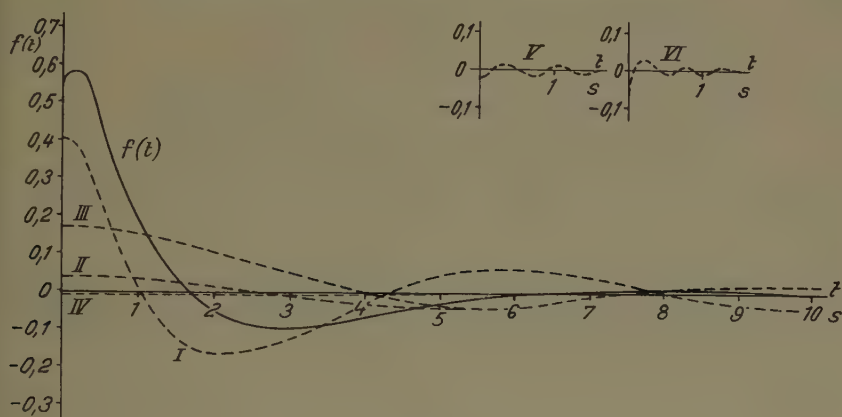
Die Berechnung der Übergangsfunktion erfolgt am besten graphisch, wozu die in Tabelle 1 angegebenen Funktionen ein für allemal berechnet und aufgezeichnet werden. Für eine bestimmte Zeit  $t$  berechnet man  $\lambda_0 t$  und kann der entsprechenden Kurve  $f_c(t)/(A \lambda_0)$  bzw.  $f_s(t)/(A \lambda_0)$  entnehmen.

Man hat dabei Gleichung (10) zu beachten, das heisst Multiplikation mit  $\cos \lambda_1 t$  bzw.  $\sin \lambda_1 t$ . Zur bequemeren Rechnung kann eine Rechenscheibe aus Cellon angefertigt werden, mit welcher die Multiplikation mit den trigonometrischen Funktionen direkt aus den Kurven für  $f_c(t)$  und  $f_s(t)$  abgelesen werden kann [4]. Um schliesslich den Ausgleichsvorgang zu erhalten, sind die einzelnen Teilbeträge zu addieren.

Zum Abschluss soll noch ein Beispiel angegeben werden. In Figur 1 ist  $v(\lambda) = \text{Im } F(\lambda)/\lambda$  in Funktion von  $\lambda$  in Per./s aufgetragen (ausgezogene Kurve),



Figur 1  
Approximation von  $\text{Im } F(\lambda)/\lambda$  durch sechs Hilfsfunktionen.



Figur 2

Zusammensetzung der Übergangsfunktion.

welche durch sechs Hilfsfunktionen approximiert wird (gestrichelte Kurven). Es ändert sich dabei nichts, wenn für  $\lambda$  anstatt der Kreisfrequenz  $2\pi f$  überall die Frequenz  $f$  in Hertz eingesetzt wird. In Figur 2 sind die Anteile der einzelnen Hilfsfunktionen zum zeitlichen Verlauf sowie deren Summe  $f(t)$  dargestellt. Im vorliegenden Fall ergibt sich eine stark gedämpfte Schwingung.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. S. BROWN und D. P. CAMPBELL, *Principles of Servomechanisms* (John Wiley & Sons, Inc., New York 1948), S. 332.
- [2] K. W. WAGNER, *Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation*, 2. Aufl. (Barth, Leipzig 1950), S. 29.
- [3] K. W. WAGNER, *Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen* (Klemm, Wiesbaden 1947), S. 51.
- [4] J. HÄNNY, *Regelungstheorie* (Leemann, Zürich 1947), S. 81.
- [5] JAHNKE-EMDE, *Tafeln höherer Funktionen*, 4. Auflage (Teubner, Leipzig 1948), S. 1–26.

## Summary

A practical method for determining the transient response  $f(t)$  of an automatic control system from the frequency response  $F(\lambda)$  is given. The real and imaginary part of  $F(\lambda)/\lambda$  each are approximated by a series of auxiliary functions  $\varphi(\lambda)$  with known corresponding time functions. A table of the most useful of these correspondences is included.

The resulting transient response is obtained as one of the two sums equation (10a) or equation (10b) according to the choice of the real or imaginary part of the frequency response as the point of departure.

As an example the frequency response with the imaginary part given in figure 1 is transformed to the transient response shown in figure 2 using the six auxiliary functions indicated in figure 1.

(Eingegangen: 29. Januar 1954.)



## The Effect of Cross-Viscosity on the Performance of Full Journal Bearing without Side-Leakage

By RAMACHANDRA SUBBA RAO and SWAMI DAYAL NIGAM, Kharagpur, India<sup>1)</sup>

BRAUN and REINER<sup>2)</sup> have shown the existence of stresses in directions 'across' the velocity gradient in non-Newtonian liquids, and have explained such effects theoretically by including in the stress-flow tensor relation quadratic terms depending on the coefficient of 'cross viscosity'. The most general relation between the stress matrix and the flow matrix is

$$\begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\mu \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{vmatrix} + 4\mu_1 \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{vmatrix}^2, \quad (1)$$

where  $\tau_{ij}$  are the stress,  $p$  is the pressure,  $\mu$  is the coefficient of shear viscosity,  $\mu_1$  is the coefficient of cross viscosity and

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

For ordinary or Newtonian liquids  $\mu_1$  is zero.

SOMMERFELD<sup>3)</sup> has investigated the problem of full journal bearing for Newtonian liquids by assuming the pressure to be constant across the depth of the film. He finds that for a full journal bearing without side-leakage the 'attitude angle' is 90 degrees. In actual practice it is observed to be more than 90 degrees and is explained as due to side-leakage.

In this paper we investigate the problem of full journal bearing for non-Newtonian liquids by assuming a relation between stress matrix and the flow matrix as defined in (1), and find that this discrepancy may be explained by taking into consideration the non-Newtonian character of the liquid.

The equations governing the flow of non-Newtonian liquids in two dimensions are,

$$\varrho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\varrho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (3)$$

and the equation of continuity is

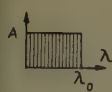









$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology.

<sup>2)</sup> I. BRAUN and M. REINER, *Quart. J. Mech. appl. Math.* 5, 42-53 (1952).

<sup>3)</sup> A. E. NORTON, *Lubrication* (McGraw-Hill, New York, 1942), pp. 107-116.

Tabelle 1<sup>1)</sup>

$\phi(\lambda)$	$f_c(t)$	$f_s(t)$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda_0 t}{\lambda_0 t}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos \lambda_0 t}{\lambda_0 t}$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \frac{\lambda}{\lambda_0}$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin \lambda_0 t}{\lambda_0 t} - \frac{1 - \cos \lambda_0 t}{(\lambda_0 t)^2} \right]$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin \lambda_0 t}{(\lambda_0 t)^2} - \frac{\cos \lambda_0 t}{\lambda_0 t} \right]$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos \lambda_0 t}{(\lambda_0 t)^2}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{\lambda_0 t} - \frac{\sin \lambda_0 t}{(\lambda_0 t)^2} \right]$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \sin \frac{\pi \lambda}{2 \lambda_0}$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{4}{\pi} \frac{\pi - 2 \lambda_0 t \sin \lambda_0 t}{\pi^2 (\lambda_0 t)^2}$	$A \lambda_0 \frac{4}{\pi} \frac{2 \lambda_0 t \cos \lambda_0 t}{\pi^2 (2 \lambda_0 t)^2}$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \cos \frac{\pi \lambda}{2 \lambda_0}$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{4}{\pi} \frac{\pi \cos \lambda_0 t}{\pi^2 (\lambda_0 t)^2}$	$A \lambda_0 \frac{4}{\pi} \frac{\pi \sin \lambda_0 t - 2 \lambda_0 t}{\pi^2 - (2 \lambda_0 t)^2}$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \sin \pi \frac{\lambda}{\lambda_0}$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{1 + \cos \lambda_0 t}{\pi^2 (\lambda_0 t)^2}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda_0 t}{\pi^2 - (\lambda_0 t)^2}$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \cos \pi \frac{\lambda}{\lambda_0}$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_0 t \cdot \sin \lambda_0 t}{\pi^2 - (\lambda_0 t)^2}$	$-A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_0 t (1 + \cos \lambda_0 t)}{\pi^2 - (\lambda_0 t)^2}$
 $\phi(\lambda) = A e^{-\frac{\lambda}{\lambda_0}}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + (\lambda_0 t)^2}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_0 t}{1 + (\lambda_0 t)^2}$
 $\phi(\lambda) = A \frac{1}{1 + \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2}$	$A \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$	$A \lambda_0 \frac{1}{\pi} \left[ e^{-\lambda_0 t} \text{Ei}(\lambda_0 t) - e^{\lambda_0 t} \text{Ei}(-\lambda_0 t) \right]$
 $\phi(\lambda) = A e^{-\left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2}$	$A \lambda_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left( \frac{\lambda_0 t}{2} \right)^2}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} e^{-\left( \frac{\lambda_0 t}{2} \right)^2} \int_0^{\frac{\lambda_0 t}{2}} e^{y^2} dy$

1) Für  $\Phi(\lambda)$  ist je nachdem  $\varphi(\lambda)$  bzw.  $\psi(\lambda)$  einzusetzen.

Integrating (4) from 0 to  $h$  with respect to  $y$  and using the condition that  $v(0) = v(h) = 0$ , we find

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \, dy = 0. \quad (16)$$

Equations (12) and (16) are encountered in the problem of slider bearing for Newtonian lubricants. From (12) and (16) we get

$$\frac{dP}{dx} = 6 \mu U \left( \frac{1}{h^2} - \frac{K}{h^3} \right). \quad (17)$$

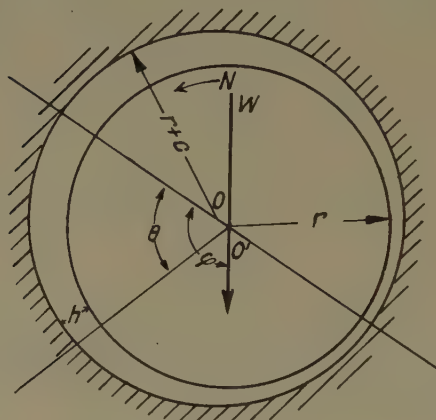


Figure 1  
The Journal Bearing.

Putting  $dx = r \, d\theta$  and  $h = c(1 + n \cos \theta)$ , where  $n = e/c$  for a journal bearing, we get

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{6 \mu U r}{c^2} \left[ \frac{1}{(1 + n \cos \theta)^2} - \frac{K}{c(1 + n \cos \theta)^3} \right].$$

If  $P = P_0$  when  $\theta = 0$  and  $\theta = 2\pi$

$$P - P_0 = \frac{\mu U r}{c^2} \cdot \frac{6n(2 + n \cos \theta) \sin \theta}{(2 + n^2)(1 + n \cos \theta)^2}, \quad (18)$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{U}{h} - \frac{h-2y}{2\mu} \cdot \frac{dP}{r \, d\theta}.$$

Therefore the value of  $p_1$  on the journal  $y = 0$  is

$$p_{1,j} = \frac{\mu_1 U^2}{c^2} \left[ \frac{4}{1 + n \cos \theta} - \frac{6(1 - n^2)}{(2 + n^2)(1 + n \cos \theta)^2} \right]^2 + A. \quad (19)$$

The pressure on the journal is given by

$$p - p'_0 = \frac{\mu U r}{c^2} \cdot \frac{6 n (2 + n \cos \theta) \sin \theta}{(2 + n^2) (1 + n \cos \theta)^2} + \frac{4 \mu_1 U^2}{c^2} \times \left[ \left\{ \frac{2}{1 + n \cos \theta} - \frac{3 (1 - n^2)}{(2 + n^2) (1 + n \cos \theta)^2} \right\}^2 - \left( \frac{2 n + 1}{2 + n^2} \right)^2 \right], \quad (20)$$

where  $p'_0$  is the pressure on the journal when  $\theta = 0$  or  $\theta = 2\pi$ .

Integrating along and perpendicular to the line of centres  $OO'$ , we find

$$W \cos \varphi = L \int_0^{2\pi} p \cos \theta r d\theta = - \frac{4 \mu_1 U^2 L r \pi n}{c^2} \cdot \frac{8 n^4 - 5 n^2 - 4}{(2 + n^2)^2 (1 - n^2)^{3/2}},$$

$$W \sin \varphi = L \int_0^{2\pi} p \sin \theta r d\theta = \frac{\mu U L r^2}{c^2} \cdot \frac{12 n}{(2 + n^2) (1 - n^2)^{1/2}}.$$

Therefore

$$\tan \varphi = - \frac{3 \mu r}{\mu_1 U} \cdot \frac{(2 + n^2) (1 - n^2)}{8 n^4 - 5 n^2 - 4}. \quad (21)$$

when

$$\mu_1 = 0, \quad \varphi = 90^\circ.$$

We find, the effect of the cross viscosity is to make the attitude angle greater than 90 degrees and to shift the point of minimum film thickness towards the load line opposite to the direction of rotation. The frictional torque on the journal is independent of the coefficient of cross viscosity and has the same value as in the case of Newtonian liquid.

A further treatment in the case of slider and partial journal bearings operating with non-Newtonian lubricants will be presented in greater detail in subsequent papers.

### *Zusammenfassung*

SOMMERFELDS Theorie ergibt für den Verlagerungswinkel eines vollen Gleitlagers den Betrag von  $90^\circ$ . In Wirklichkeit entsteht ein grösserer Verlagerungswinkel. Es wird hier nachgewiesen, dass die Berücksichtigung der Querviskosität die Unstimmigkeit zwischen Theorie und praktischer Beobachtung beseitigt.

(Received: February 6, 1953.)

## Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 8. Mai 1954 in Solothurn

### Berichte über angewandte Physik und Mathematik

#### Experimentelle Beiträge zum Spaltverlustproblem, von R. HÜRLIMANN, Zürich<sup>1)</sup>.

Von verschiedenen Sekundärströmungsursachen in der Nähe der Schaufelenden axialer Strömungsmaschinen wird im folgenden nur diejenige des Spaltes, das heisst der induzierte Spaltverlust, bei inkompressibler Strömung an einem Einzelflügel untersucht.

Um das Verhalten der Schaufel bei verschiedenen Spaltweiten und die entsprechenden Strömungsvorgänge in Spaltnähe festzustellen, sind Kraft- und Druckmessungen durchgeführt worden. Für erstere wurde ein symmetrisches, 9% dickes NACA-Profil und für letztere ein symmetrisches, 9,6% dickes Profil verwendet.

Die Widerstandszunahme  $\Delta c_w / c_a^2$  der stumpf abgeschnittenen Schaufel in Funktion von  $c_a$  bei verschiedenen relativen Spaltweiten zeigt bei kleineren Spalten mit wachsendem Auftrieb fallende Tendenz. Bei kleinsten Spaltweiten, unter  $s/t = 1,2\%$ , tritt ein stärkerer Abfall des Zusatzwiderstandes auf, als aus den Werten oberhalb dieser Grenze erwartet werden könnte.

Die Auftriebsverteilung über der Schaufellänge bei konstanter Spaltweite geht mit zunehmendem Anstellwinkel immer mehr in eine rechteckige über. Dasselbe gilt bei kleiner werdender Spaltweite. Ferner zeigen sich am Schaufelende charakteristische Auftriebsspitzen. Diese Spitzen sind ebenfalls beim Druckwiderstandsverlauf festzustellen und können bis zum Zweifachen des Mittelwertes ansteigen.

Über die Vorgänge am Schaufelende geben Druckmessungen an Saug-, Druck- und Stirnseite Aufschluss. In zirka 10–20% der Tiefe entsteht am Spalt eine zweite Saugspitze. Ausserdem nehmen bei kleineren Spaltweiten die Unterdrücke in Spaltnähe nur im vorderen Profilverteil zu, während bei grösseren Spaltweiten sich ebenfalls im hinteren Profilverteil hohe Unterdrücke zeigen. Diese können als Mass für die Lage des Spaltwirbels interpretiert werden, was durch Wanddruckmessungen und Anstrichversuche bestätigt wird.

Um zu versuchen, die Strömungsvorgänge in Spaltnähe zu beeinflussen, wurden Messungen mit verschiedenen Endformen durchgeführt. Abänderungen sind dabei nur in einer Zone von höchstens 8% der Schaufelhöhe angebracht worden. Als Spaltmass wurde die engste Stelle zwischen Schaufel und Wand gewählt. Sämtliche Messungen werden verglichen mit denjenigen der stumpf abgeschnittenen Schaufel. Es zeigte sich dabei, dass alle abgerundeten Formen ungünstig sind. Ferner gaben auch gepfeilte Schaufelenden bzw. sich verengende oder erweiternde Spalte usw. keine Verbesserungen. Nach der Saugseite zugeschärfte Endformen erwiesen sich als widerstandsvermindernd, speziell solche mit hochgezoge-

<sup>1)</sup> Institut für Aerodynamik der ETH.



ner Kante. Bei  $s/t = 2\%$  bzw.  $6\%$  wurden mit diesen Formen im Durchschnitt Verbesserungen von  $25\%$  bzw.  $15\%$  erreicht.

Um zu versuchen, den Einfluss von Drosselung und Druckwiderstand zu trennen, wurde ein spezieller Wehrströmungsversuch durchgeführt. Ein Hindernis wurde unter verschiedenen Winkeln  $\alpha$  zur Anströmrichtung gestellt und der entstehende Druckverlust gemessen. Es zeigte sich dabei, dass bei kleinen Winkeln  $\alpha$  die Unterschiede der Drosselkoeffizienten verschiedener Formen gering sind. Ferner bleibt die Abstufung der Drosselkoeffizienten bei  $\alpha = 90^\circ$  für die verschiedenen Anordnungen bei kleinen Winkeln nicht bestehen.

**Thermostatische Zustandsänderungen des trockenen und des nassen Dampfes, von L. S. DZUNG, Baden<sup>1)</sup>.**

Im Dampfturbinenbau stösst man bei der Berechnung der Niederdruckstufen auf die Schwierigkeit, dass die Eigenschaften des nassen Wasserdampfes keine einfache analytische Formulierung zulassen. Diese Schwierigkeit spielt zwar für die einzelnen Berechnungen keine Rolle, denn man kann immer ein anerkanntes Zustandsdiagramm zur Hand nehmen und alle notwendigen Zahlen ablesen. Bei den allgemeinen Überlegungen über die Gesetzmässigkeiten wirkt dies jedoch unangenehm. Es wird nun ein Verfahren gezeigt, das diese Schwierigkeit vermeidet. Gleichzeitig werden gewisse Eigenschaften des Dampfes im allgemeinen ins Licht gebracht.

Wir betrachten ein geschlossenes System von einer Stoffkomponente mit zwei Freiheitsgraden. Es kann sich dabei um die rein gasförmige Phase handeln, das heisst einen trockenen Dampf, oder eine Gleichgewichtsmischung der flüssigen und der gasförmigen Phase, das heisst einen nassen Dampf. Im letzten Fall kommt das Massenverhältnis der beiden Phasen als ein neuer Freiheitsgrad hinzu, dagegen wird wegen der Gleichgewichtsbedingung die Temperatur durch den Druck gegeben. Man hat daher in jedem Fall zwei Freiheitsgrade.

Wir verwenden den Druck  $p$  und das spezifische Volumen  $v$  als die zwei Zustandsvariablen und definieren

$$\tau \equiv p \frac{v}{R}, \quad k \equiv -\left(\frac{\partial \log p}{\partial \log v}\right)_s, \quad m \equiv -\left(\frac{\partial \log p}{\partial \log v}\right)_h.$$

$R$  ist die Gaskonstante,  $s$  und  $h$  sind die (spezifische) Entropie und Enthalpie.

Es lässt sich zeigen, dass für eine durch

$$\varphi \equiv \frac{dh}{v dp} = \text{const}$$

definierte polytrope Zustandsänderung der Exponent

$$n \equiv -\left(\frac{\partial \log p}{\partial \log v}\right)_\varphi$$

gegeben ist durch den Ausdruck

$$\frac{n-1}{n} = \varphi \frac{k-1}{k} + (1-\varphi) \frac{m-1}{m}.$$

In der elementaren Thermodynamik wird das ideale Gas gekennzeichnet durch die Beziehung  $\tau = T$ , wonach  $m = 1$ ,  $k = k(T) = c_p/c_v$  folgt. ( $T$  bedeutet Temperatur;  $c_p, c_v$  die spezifische Wärme.)

<sup>1)</sup> Aktiengesellschaft Brown, Boveri & Cie.

Der ideale Dampf<sup>1)</sup> wird definiert durch  $m = 1$ . Dann folgt  $k = k(\tau)$ . Man kann zeigen, dass der ideale Dampf in vieler Hinsicht ähnliche Eigenschaften wie das ideale Gas besitzt und denselben aerothermodynamischen Grundgleichungen gehorcht, solange der nullte Hauptsatz der Thermodynamik nicht ins Spiel kommt. Dem polytropen, das heisst idealen Gas mit konstanter spezifischer Wärme entspricht ein polytroper, das heisst idealer Dampf mit konstantem  $k$ .

$k$  und  $m$  können auf Grund thermodynamischer Identitäten berechnet werden. Für nassen Wasserdampf weisen die Zahlwerte  $k$  und  $m$  innerhalb des in Niederdruckturbinen vorkommenden Zustandsgebietes nur sehr geringe Veränderlichkeit auf. Die Bedingungen

$$m \approx \text{const}, \quad k \approx \text{const}$$

sind weitgehend erfüllt. Für einen solchen «semipolytropen Dampf» kann man viele von der elementaren Thermodynamik bekannte und für das polytrope Gas streng gültige Formeln mit unwesentlicher Ergänzung übernehmen. Insbesondere kann man für die isentrope Zustandsänderung alle bekannten Formeln beibehalten und für die polytrope Änderung ausserdem die nach oben mit dem  $m$ -Glieder ergänzten Formeln benützen. Die Zahlenwerte für Wasserdampf im genannten Zustandsgebiet sind

$$m \approx \frac{23}{22}, \quad k \approx \frac{10}{9}.$$

Zwischen zwei Zustandspunkten 1, 2 längs einer Polytrophen bestehen wie für das polytrope Gas die Beziehungen

$$h_2 - h_1 = \varphi \frac{n}{n-1} R (\tau_2 - \tau_1), \quad \frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^{n/(n-1)} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^n.$$

Sie gelten auch für die Isentrope und die Isenthalpe durch die Spezialisierung  $\varphi = 1$  bzw.  $\varphi = 0$ . Hingegen hat die allgemeinere Gleichung

$$h = \frac{k}{k-1} R \tau + \text{const}$$

nur für das polytrope Gas und den polytropen Dampf Gültigkeit und nicht für den semipolytropen Dampf.

Eine ausführliche Veröffentlichung hierüber ist vorgesehen.

### **Essais sur des grilles d'aubes pour compresseurs supersoniques, par B. CHAIX, Zurich<sup>2)</sup>.**

Pendant le démarrage d'un compresseur supersonique, les vitesses relatives à l'entrée de l'aubage mobile peuvent passer progressivement du régime subsonique au régime supersonique, sans blocage, si les canaux formés par les aubes sont divergents. Cette divergence assure la stabilité d'un choc de compression comme dans une tuyère de LAVAL. Tant que la composante axiale d'entrée est subsonique, le débit s'adapte à la vitesse périphérique suivant la direction des aubes. Il est possible, si l'extrados des profils est droit à partir du bord d'attaque et sur une longueur suffisante, qu'en régime stationnaire aucune onde ne se propage en amont de la roue.

Une des grilles que nous étudions en soufflerie à l'Institut d'Aérodynamique satisfait à ces conditions. Elle a été essayée avec un nombre de REYNOLDS basé

<sup>1)</sup> Vergleiche W. TRAUPEL, Forschung 18, 3 (1952); L. S. DZUNG, J. aer. Sci. 20, 650 (1953).

<sup>2)</sup> Institut d'Aérodynamique, E. P. F.

sur la corde de 700 000. Avec un nombre de MACH d'entrée de 1,3 et une contre-pression de 1,7 fois la pression amont, un choc droit se place près de la sortie du canal que forment deux aubes voisines. Pour un taux de compression plus élevé, de 1,8, on observe plus près de l'entrée du canal *deux* chocs droits en série: le décollement des couches limite suffit à créer un col sonique intermédiaire.

Pour un taux de compression de 1,9, le choc remonte le courant jusqu'à l'entrée du canal; se détachant devant le bord d'attaque d'une aube, il se prolonge en amont de la grille où il est accompagné d'un faisceau de détente. Dès lors l'écoulement amont n'est plus uniforme et son débit est influencé par la pression aval. Au prix de ces perturbations (qui accompagneraient la roue dans sa rotation) on arrive à diminuer les pertes dans la grille, la couche limite sur l'intrados des aubes étant dès le bord d'attaque soumise à la pression régnant derrière le choc. Compte tenu des phénomènes irréversibles *à l'intérieur* de l'aubage et des pertes qu'entraînerait l'homogénéisation de l'écoulement aval à section et impulsion constantes, le rendement adiabatique de la compression s'élève à 90 %. Le rendement adiabatique d'un choc droit qui, sans diffuseur subsonique, livrerait le même taux de compression de 1,9, atteindrait 96 %, indiquant que le choc en soi n'est pas le siège des pertes principales.

Aux nombres de MACH plus élevés, de 1,6 par exemple, la couche limite se comporte de manière à réduire l'amplitude du choc près de la paroi. Le premier jambage de la configuration  $\lambda$  bien connue est suivi, à partir du point de transition de la couche limite, par une succession de chocs obliques. En produisant ce ralentissement préalable par la forme même de l'aube et en réduisant la divergence du canal qui suit le choc droit, on a, dans une autre grille, fait passer le taux de compression de 2,7 à 3,3 pour un nombre de MACH d'entrée de 1,7.

Les essais de grilles fixes en soufflerie permettent d'analyser des phénomènes de chocs et de décollements assez essentiels et typiques pour qu'on en puisse tirer des conclusions utiles à la construction non seulement d'ailéage de compresseurs axiaux, mais aussi de diffuseurs de certains compresseurs radiaux ou de diffuseurs d'entrée pour avions supersoniques.

### **Instationäre Randbedingung für die durch eine Querschnittsänderung gebildete Übergangszone in einer instationären, eindimensionalen Gasströmung, von Y.-N. CHEN, Winterthur<sup>1)</sup>.**

In einer eindimensionalen Strömung kompressibler Gase wird sich jede Störung als Druck- oder Verdünnungswelle fortpflanzen. Solche instationären Strömungen können graphisch nach dem Charakteristikenverfahren berechnet werden. Im Randgebiet mit sprunghafter Querschnittsänderung ist aber eine instationäre Behandlung der Strömung sehr schwierig, weshalb diese dort im allgemeinen unter Vernachlässigung der mit der Zeit veränderlichen Grössen als quasistationär betrachtet wird. Diese Vereinfachung ist nur bei Strömungen mit Unterschallgeschwindigkeit gerechtfertigt, wenn das Zeitintervall des graphischen Verfahrens so gross gewählt ist, dass ein genügender Ausgleich der im Randgebiet hin- und herwandernden Wellen sichergestellt wird.

Diese stationäre Randbedingung hat aber eine für die stationäre Strömung charakteristische Eigenschaft zur Folge: die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt des Randgebietes übersteigt die Schallgeschwindigkeit nicht. Für eine instationäre Strömung durch eine in einem Rohr befindliche, einfache Düse würde also eine Überschallgeschwindigkeit sowohl am Düsenaustritt als auch in

<sup>1)</sup> Gebrüder Sulzer AG.

dem sich nach der Düse bildenden Strahl ausgeschlossen. Aber im Experiment treten doch Überschallgeschwindigkeiten auf, wenn das Verhältnis der Drücke vor und nach der Düse gross ist. In diesem Fall muss die Randbedingung in der Düsenzone unbedingt instationär behandelt werden. Hierzu denke man sich den Strahl von einem Diffusor umgeben, der die gleiche Form hat wie die freie Grenze des Strahls. Der mit dem Strahl verbundene Carnot-Stoss wird dann als Reibungsverlust des Diffusors aufgefasst. Die instationäre Strömung in der Düse dürfte damit durch eine solche in der gedachten Laval-Düse reproduziert werden. Nach dem Differenzenverfahren lässt sich die Wirkung der Reibung und der Änderung der Strömungsquerschnitte berechnen.

Für eine instationäre Überschallströmung in einem Rohr mit verschiedenen Querschnitten muss die Übergangszone zweier Querschnitte ebenfalls instationär behandelt werden. Nur auf diese Weise lassen sich die von der Übergangszone stromabwärts wandernden Wellen richtig darstellen.

### **Informationstheorie, von J. R. DE FRIES, Zürich<sup>1)</sup>.**

Der wissenschaftliche Informationsaustausch stellt eine Reihe besonderer Probleme. Es handelt sich hier meist um abstrakte, häufig sehr schwer mitteilbare Umstände und Erkenntnisse, deren kollektiver Besitz doch wieder die unmittelbare Voraussetzung der Weiterführung der Arbeit einer Forschungsgemeinschaft ist. Die Unterschiede in der Leistungsfähigkeit sind bei verschiedenen Informationsformen und bei verschiedenen Voraussetzungen der Partner beträchtlich. Die Aufgabe erscheint daher interessant, Optimalbedingungen für den wissenschaftlichen Informationsaustausch zu ermitteln, wofür bereits einige Ansätze, speziell aus den USA., vorliegen.

In einer Annäherung besteht ein Mitteilungsvorgang in der Reaktion eines komplexen Reglersystems auf eine Veränderung der Grössen. Im Sinne einer modellmässigen Analogie können daher die Überlegungen der Reglertechnik auf Informationsvorgänge angewendet werden. An Stelle eines untauglichen Mechanisierungsversuches hat sich jedoch das Verfahren als fruchtbarer erwiesen, Reaktionen typischer Regelstrecken nach ihrer Eigenart auf Mitteilungsvorgänge zu beziehen und abzuschätzen, in welchem Masse die Reglerreaktionen im menschlichen Verhaltensspektrum aufzufinden sind.

Eine Reihe solcher Identitäten lassen sich schon mit Hilfe der Grundformen, proportionaler und integraler Regelstrecken zeigen, speziell mit deren instabilen Bereichen. Proportionale Elemente zeigen sich deutlich in impulsiven und instinktiven Reaktionen. Instabilität tritt technisch hier ein, wenn die Messgrösse verzögert auf die Stellglieder wirkt (Totzeit). Sie entspricht etwa jener Unsicherheit (Instabilität), die auftritt, wenn Befehle zu sofortigen (impulsiven) Reaktionen erteilt werden, die der momentanen Situation des Befehlsempfängers nicht angepasst sind. Integrale Elemente finden sich ausgeprägt im verstandesmässigen Interpretieren und Auswerten von Informationen. Charakteristisch ist hierfür ein Bewertungsvorgang, der nach grösseren Ausschlägen um einen «Endurteilswert» nach der Abklingzeit zu einem (im Gegensatz zu proportionalen Strecken) fehlerfreien Stellwert kommt. Instabilität tritt hier ein, wenn die Stellgeschwindigkeit relativ zur Strecke zu gross ist. Im regeltechnischen Sinne müssten solchen Informationsformen allgemein geeignete, auf das menschliche Wesen und den angesprochenen Bereich regeltechnisch abgestimmte Übergangsfunktionen zugrunde gelegt werden.

<sup>1)</sup> Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt.



An Hand von Kommunikationsbetrachtungen können weitere Hinweise gewonnen werden (Informationstheorie der elektrischen Nachrichtentechnik). Es haben sich hier insbesondere drei Frequenzbegriffe als brauchbar erwiesen:

**Standpunktwechselfrequenz:** Eine wesentliche Differenz zwischen Mensch und Modell liegt im «Ermüdungsfaktor». Bei längerer Beanspruchung eines bestimmten gedanklichen Punktes fließen die Potentiale ab, wie etwa ein Stein in waag-rechter Hand nur kurze Zeit gehalten werden kann. Dieser Ermüdungsfaktor verlangt, dass ein bestimmter Mitteilungspunkt nur für eine optimale Zeitdauer berührt werde und dann in stufenweisem Abbau des Verständnisses eine andere Stelle gedanklicher Aufmerksamkeit zur Wirkung gelange. Diese Zeiten liegen in der Grössenordnung von rund 2 min.

**Standpunkt wiederholungsfrequenz:** Soll ein bereits berührter Punkt im Rahmen einer Mitteilung wieder aufgegriffen werden, so ist dessen Erholung abzuwarten; es ergeben sich Zeiten von 3 bis 4 min als Minimum.

**Wert-Funktions-Wechselfrequenz:** Um die vorhandenen Gedächtnisinhalte zur Interpretation einer Information heranzuziehen, ist ein Wechsel zwischen Grössenangaben und Angaben über funktionelle Zusammenhänge notwendig. Wird dieser Rhythmus unterbrochen, so wandert die Aufmerksamkeit ab, die Aufnahmeleistung sinkt. Experimentell ergeben sich für typische naturwissenschaftliche Inhalte Frequenzen von 0,03 Hz, in Sonderfällen noch wesentlich niedrigere Werte.

Überlegungen der geschilderten Art sollen nicht im Sinne einer «terrible simplification» in den wertvollen persönlichen Kontakt eingreifen. Ihr Wert für die Gestaltung von Instruktionen und Informationen soll andererseits nicht unterschätzt werden. Sie gestatten, den Zeitaufwand und die Überbestimmtheit in der Mitteilung naturwissenschaftlicher Informationen zu vermindern und ermöglichen so, den Horizont des in der kurzen Zeit eines Lebens Erfassbaren über die heutigen, quantitativ bedingten Erkenntnisgrenzen hinauszurücken.

**Ein Impulsgenerator mit Sekundäremissionsröhren**, von E. BALDINGER und M. NICOLET, Basel<sup>1)</sup>.

Es wird ein Generator zur Erzeugung von rechteckigen Testimpulsen beschrieben, der als wesentliches Element die Sekundäremissionsröhre Philips EFP60 verwendet. Der Vorteil dieser Röhre besteht darin, dass sie kleine Schaltkapazitäten besitzt und im Impulsbetrieb Ströme bis zu 300 mA liefert.

Der Apparat erzeugt Rechteckimpulse von  $1 \cdot 10^{-7}$  bis  $128 \cdot 10^{-7}$  s Dauer sowie Spannungen zur Zeitablenkung und Hellsteuerung eines Kathodenstrahl-oszillographen. Bei  $52 \Omega$  Ausgangswiderstand ist die Anstiegszeit des Testimpulses kürzer als  $2 \cdot 10^{-8}$  s. Die maximale Impulshöhe hängt von diesem Widerstand ab und kann bis zu 400 V betragen.

Eine Beschreibung der Schaltung erfolgt demnächst in der ZAMP.

**Entwicklung einer programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschine am Institut für angewandte Mathematik der ETH.**, von H. SCHLAEPI, Zürich<sup>2)</sup>.

Das Projekt der ERMETH (elektronische Rechenmaschine der ETH.) entstand infolge der stets wachsenden Nachfrage nach numerischer Rechenleistung seitens Industrie und Wissenschaft. Mit der seit 1950 am Institut für angewandte

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität.

<sup>2)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.



Mathematik im Betrieb stehenden Relaisrechenmaschine kann der Bedarf längst nicht mehr gedeckt werden<sup>1)</sup>.

Die ERMETH rechnet im Dezimalsystem und mit beweglichem Komma. Sie verfügt neben den Befehlen für das Rechnen mit beweglichem Komma über besondere Befehle für die Ausführung der arithmetischen Operationen mit festem Komma, die Rechnen mit mehrfacher Stellenzahl und Errechnen von Befehlen ermöglichen.

Ein ERMETH-Wort kann drei verschiedene Bedeutungen haben, nämlich eine Zahl in halblogarithmischer Darstellung von der Form  $a \cdot 10^e$ , eine Zahl mit festem Komma und ein Befehlspaar. Das Programm ordnet jedem Wort eine dieser Bedeutungen zu. Ein Wort umfasst 16 Dezimalstellen, die in Serie transferiert werden. Jede Dezimalstelle ist nach AIKEN durch vier Dualstellen mit den Gewichten 2-4-2-1 verschlüsselt. Die Tetraden werden parallel transferiert und bearbeitet.

Hinsichtlich Organisation und Aufbau des Rechenwerks sowie des Befehlsverzeichnisses kann auf eine frühere Veröffentlichung verwiesen werden<sup>2)</sup>. Die Additionszeit beträgt 5 ms, die Multiplikationszeit 15 ms, beide für bewegliches Komma und ohne Suchzeit.

Die logischen Schaltungen des Rechen- und Leitwerks sind gleichstromgekoppelt. Sie verwenden «Gates» mit Germaniumdioden für die Verknüpfungen der Konjunktion und Disjunktion sowie Inverter mit Doppeltrioden für diejenige der Negation. Die zu bearbeitende Information wird in Flipflops bereitgestellt, in Schaltnetzwerken modifiziert, und nach Erreichen des Ruhewertes in andere Flipflops abgesetzt. Die Schaltnetzwerke können aus Ketten von bis zu zehn zweistufigen Diodennetzwerken bestehen, wovon jedes zur Pegelwiederherstellung durch einfach oder doppelt negierende Inverter gefolgt ist. Wo nötig, besorgen Kathodenfolger die Leistungsverstärkung. Die Elektronenröhren enthaltenden Schaltungen sind durchwegs mit der Type E90CC bestückt und so stark stromgegekoppelt, dass ein Emissionsabfall auf 50 % des Nennwertes ihr Funktionieren noch nicht merklich beeinträchtigt. Als Diode wird durchwegs die OA55 eingesetzt, wobei die Schaltungen eine sehr starke Verminderung des Sperrwiderstandes zulassen. Die Impulsfolgefrequenz beträgt im logischen Teil der ERMETH 32 kHz.

Der Speicher besteht aus einer Magnettrommel mit einer mittleren Suchzeit von 5 ms und kann 10000 Zahlen oder Doppelbefehle aufnehmen. Er besitzt 50 tetradische Signalkanäle mit 200 Magnetköpfen, zu denen weitere 20 für die 5 regenerierenden Register im Rechen- und Leitwerk sowie 5 Hilfskanäle kommen. Um die Suchzeit den Operationszeiten anzupassen, werden die Signalimpulse von 10 Wörtern so ineinander verschachtelt, dass jeder zehnte Impuls zum selben Wort gehört. Die Impulsfrequenz im Speicher beträgt somit das Zehnfache der Frequenz der Rechenwerkimpulse. Für das im ERMETH-Speicher angewandte «Return-to-Zero»-Verfahren wurden neuartige Schreib- und Ableseschaltungen entwickelt, die eine erhebliche Ersparnis an elektronischen Schaltmitteln ermöglichen. Hierüber wird an anderer Stelle eingehend berichtet.

Die Ein- und Ausgabe-Ausrüstung der ERMETH umfasst Lochkartenstationen (10 Wörter je Sekunde), elektrische Schreibmaschinen (ein halbes Wort je Sekunde), Zeilendrucker (2 Wörter je Sekunde) sowie Lampen- und Drucktastfelder. Für die Rechenplanfertigung, Kontrolle und Auswertung ist eine von der ERMETH unabhängige Einheit vorgesehen, die aus Lochkartenstationen, Zeilendrucker und einem vollständigen Bedienungspult besteht.

<sup>1)</sup> A. P. SPEISER, *Projekt einer elektronischen Rechenmaschine am Institut für angewandte Mathematik der ETH.* (ZAMP 4, 317 [1953].)

<sup>2)</sup> J. R. STOCK, *An Arithmetic Unit for Automatic Digital Computers*, ZAMP 5, 168 (1954).

## Bemerkungen über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren

Von OSKAR DÖHLER, Paris<sup>1)</sup>, und WERNER KLEEN, München<sup>2)</sup>

In einer Arbeit gleichen Titels von F. LÜDI [1]<sup>3)</sup> wird angegeben, dass der Leistungsgewinn einer Travelling-Wave-Röhre durch die Raumladungskräfte der Elektronen nicht beeinflusst wird. Dabei wird angeführt, dass dies Ergebnis im Gegensatz steht zu dem einer Untersuchung, die wir zusammen mit R. WARNECKE veröffentlicht haben [2].

Wir nehmen zur Veröffentlichung [1] wie folgt Stellung:

a) Experimentell stellt man in der Travelling-Wave-Röhre einen wesentlichen Einfluss der Raumladung auf den Leistungsgewinn  $G$  fest. Dies geht auch aus anderen Veröffentlichungen hervor. CUTLER [3] erhält zum Beispiel eine sehr gute Übereinstimmung zwischen gemessenen und unter Berücksichtigung des Einflusses der Raumladung berechneten Werten von  $G$ . Vernachlässigt man die Wirkung der Raumladung, so berechnet man dagegen für  $G$  Werte, die für die angeführten Röhren BTL1 und BTL2 um 30 bis 40 dB, das heisst um den Faktor  $10^3$  bis  $10^4$  grösser sind als die gemessenen. Wird die Rechnung nicht auf der Grundlage der Theorie von PIERCE-CUTLER, sondern auf der unserer Arbeit [2] durchgeführt, so erhält man praktisch gleiche Übereinstimmung bei Einführung der Raumladungskräfte, etwa die gleichen Unterschiede bei Vernachlässigung derselben. In [2] sind ferner Kurven angegeben (siehe S. 174, Figur 5), die zeigen, dass die Berücksichtigung des Raumladungseinflusses nach [2] zu den gleichen Resultaten führt wie die der «Feldtheorie» von CHU und JACKSON [4], die diesem Einfluss auf exaktere Weise Rechnung trägt.

b) Gegen das in [1] benutzte Ersatzbild bestehen unseres Erachtens folgende Bedenken: In die Verzögerungsleitung werden Längskapazitäten  $C_L$  eingeführt. Würde man in einer Verzögerungsleitung Kondensatoren einfügen, deren Platten in axialer Richtung, das heisst in Richtung des Strahls dicht hintereinander liegen, so können Raumladungskräfte gar nicht wirksam werden. Die von den Elektronenraumladungen ausgehenden Kraftlinien würden auf diesen Kondensatorbelegungen enden, also gar keine Defokussierung der Elektronenpakete – diese ist ja die Ursache der Verminderung des Leistungsgewinns infolge der Raumladung – verursachen. Das in [1] als Grundlage benutzte Ersatzbild erscheint uns damit als physikalisch nicht berechtigt. Will man die Raumladungseffekte durch Einführung einer Kapazität erfassen, so muss diese an anderer Stelle liegen, nämlich an der Stelle der Kapazität  $C_L$ , die PIERCE [5] in ein Ersatzbild zur mathematischen Beschreibung der defokussierenden Raumladungskräfte einführt. Dieses Ersatzbild führt rechnerisch zum gleichen Ergebnis, zu dem auch unsere Arbeit [2] gelangt, wenn die praktisch meist erlaubte Näherung

$$\Gamma - \Gamma_0 \ll \Gamma_0$$

und damit

$$\frac{\Gamma_0^2}{(\Gamma - \Gamma_0)^2} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_0}{\Gamma - \Gamma_0}$$

eingeführt wird (Bezeichnungen siehe [1]).

<sup>1)</sup> Compagnie Générale de T. S. F.

<sup>2)</sup> Siemens & Halske AG.

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 438.

c) Auf Grund des Ersatzbildes in [1] mit Längskapazitäten und der unter b) hierzu gegebenen Erläuterung hätte man zu erwarten, dass bei Ersatz der Wendel durch einen kreiszylindrischen Leiter unendlich guter Leitfähigkeit gar keine freien Raumladungswellen sich ausbilden können, da diese ja durch die Existenz endlicher Raumladungskräfte bedingt sind. Dies bestätigen unseres Erachtens die Rechnungen in [1]. In Gleichung (7), S. 391, ist  $I_1$  der divergenzfreie Gesamtstrom, also  $\partial I_1 / \partial x = 0$ . Auf S. 391 ist ferner angeführt die Gleichung

$$\dot{E}_a = \frac{\partial E_a}{\partial t} = \frac{I_1}{C_l}.$$

Damit muss auch gelten

$$\dot{E}'_a = \frac{\partial^2 E_a}{\partial x \partial t} = 0,$$

also

$$E_a = f(x) + g(t).$$

Dies ist aber eine Lösung, die keinesfalls eine Ausbreitung von Wellen beschreibt.

Aus den unter a) bis c) genannten Gründen halten wir die Ergebnisse unserer zusammen mit R. WARNECKE veröffentlichten Arbeit 2 voll aufrecht.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] F. LÜDI, ZAMP 3, 390 (1952); siehe auch W. FREY und F. LÜDI, ZAMP 1, 237 (1950).
- [2] R. WARNECKE, O. DÖHLER und W. KLEEN, Wirel. Eng. 28, 167 (1951).
- [3] C. C. CUTLER, PIRE 39, 914 (1951).
- [4] L. J. CHU und J. D. JACKSON, PIRE 36, 853 (1948).
- [5] J. R. PIERCE, *Traveling-Wave Tubes* (Van Nostrand, New York 1950), S. 110, Figur 7, 1.

#### Erwiderung auf die voranstehenden Bemerkungen über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren

Von FRITZ LÜDI, Baden<sup>1)</sup>

Trotz ausführlichen brieflichen Diskussionen mit Herrn W. KLEEN konnte ich bis jetzt seine Entgegenhaltungen nicht einsehen. Die Gründe seien kurz dargelegt.

In meinen Bemerkungen sind durch Verwendung des dortigen Ersatzschemas Figur 1 [1]<sup>2)</sup> Gleichungen abgeleitet (8), (9), S. 392 [2], welche einerseits für strahlungsfreie Helix (inneres Feld  $E_i = 0$ ) die Wellenausbreitung mit bekannter Ausbreitungskonstante  $\Gamma_0$  liefert, andererseits ohne Helix (äusseres Feld  $E_a = 0$ ) die Plasmafrequenz  $\Omega$  und die Ausbreitungskonstante  $\Gamma$  für die Raumladungswelle eines oder mehrerer Elektronenstrahlen (Doppelstrahlverstärker) ergibt. Bis hier stimmen diese Schlussfolgerungen mit denen anderer Autoren, insbesondere WARNECKE, DÖHLER und KLEEN [3], überein. Die Diskrepanz tritt bei der T.W.T. auf, wo ich mit Berücksichtigung der Raumladungskräfte dasselbe Re-

<sup>1)</sup> AG. Brown, Boveri & Cie.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 441.

sultat wie ohne Berücksichtigung erhalte. Dieser Unterschied und die Gründe sind dort angeführt und «zur Diskussion gestellt».

Ich sehe auch jetzt noch den Grund für die Diskrepanz in der unsymmetrischen Verwendung des Feldes bei anderen Autoren (totales Feld  $E_a + E_i$  für die Bewegungsgleichungen der Elektronen, nur äusseres Feld  $E_a$  für die Influenzwirkung). Wie bereits in [1] ausgeführt, erhält man bei unsymmetrischer Verwendung des Feldes in den Gleichungen (8), (9), S. 392, ebenfalls die den anderen Autoren entsprechende raumladungsabhängige Gleichung (Verstärkung) für die Ausbreitungskonstante  $\Gamma$ .

An der Gültigkeit unseres Ersatzschemas (Abschnitt B, DÖHLER und KLEEN) zweifle ich bis jetzt nicht. Die Längskapazität entspricht der Windungskapazität der Helix und bewirkt sowohl die Verzögerung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit als auch das erforderliche Längsfeld für die Wechselwirkung mit dem Elektronenstrahl. Die Spannung über der Längskapazität ist nach allgemeinen elektrischen Gesetzen durch das totale Feld  $dU_1 = (E_a + E_i) dx$  gegeben, wodurch die oben besprochene Symmetriewirkung des totalen Feldes zum Ausdruck kommt. Den Längskapazitäten unseres Ersatzschemas entsprechen übrigens weitgehend die Lochplatten einer Spezialausführung der T.W.T. nach PIERCE [4]. Mit dem Satz der Herren DÖHLER und KLEEN, dass die von den Elektronenraumladungen ausgehenden Kraftlinien auf den Kondensatorbelegungen (Helixwindungen) enden, bin ich einverstanden, ich habe denselben Grund in [1] angemerkt. Es scheint mir eine gewisse Willkür in der Vorstellung zu liegen, dass die elektrischen Feldlinien beim paketierten Elektronenstrahl zur Hauptsache auf diesem anfangen und enden [5].

Nicht einverstanden bin ich mit dem Abschnitt C der Herren DÖHLER und KLEEN. Die Kopplungsgleichungen (7), (8), S. 391 [1], aus denen für stromlose Helix ( $i = 0$ )  $\dot{E}_a = I_1/C_1$  gefolgert wird, gelten wie die übrigen Differentialgleichungen (1) bis (6) [1] nur für eine Zelle des Ersatzschemas; darin sind die Ströme gemäss Rechnung mit Ersatzschema konstant, also auch  $I_1$  als Leitungsstrom auf die Längskapazität. Auf die Nachbarzelle ändert er sich jedoch sprunghaft, weil Knoten mit Verzweigungsgesetz. Erst die Verbindung der Kopplungsgleichungen (7), (8), S. 391 [1], mit den Differentialgleichungen (1) bis (6) führt mit dem gemeinsamen Lösungsansatz  $\sim e^{pt} e^{\Gamma x}$  auf die Wellenausbreitung sämtlicher Wechselgrössen, auch für  $E_a$ !

Bezüglich der experimentellen Übereinstimmung mit der Theorie (Abschnitt A, DÖHLER und KLEEN) erwähne ich, dass bei Wahl des in (1) eingeführten Kopplungsfaktors  $\alpha = 0,435$  eine solche erzielt wird, gebe aber offen zu, dass dieser Faktor nicht explizit berechnet ist; er trägt der Streuung der Feldlinien am Rand der Kondensatorplatten, also auch bei Lochplatten, Rechnung, da ja nur diese Feldlinien mit dem Elektronenstrahl in Wechselwirkung treten. Diese Streuung oder die Eindringtiefe in den Elektronenstrahl scheint mir weitgehend durch das Verhältnis Helixdurchmesser zu verkürzter Wellenlänge bestimmt zu sein. Ich erlaube mir einen Vergleich mit dem Magnetron. Dort spielt die Eindringtiefe des Wechselfeldes in den Interaktionsraum eine entscheidende Rolle für die Energieabgabe der Elektronen. Wenn die defokussierenden Raumladungskräfte nicht durch die Felder der Kondensatorplatten (Anodensegmente) kompensiert würden, wären so grosse Leistungen (grosse Elektronenballungen) kaum verständlich.

Schliesslich betone ich, dass es mir in erster Linie um die prinzipielle Seite des Problems ging, dass sich ein Nachdenken darüber noch lohnt und sich die beiden Standpunkte vielleicht näherbringen lassen, was möglicherweise von dritter Seite geschieht.



## Nachtrag bei der Korrektur

Inzwischen ist es mir durch Aufdeckung eines Fehlers in ZAMP 7, 237 (1950), aber bei Aufrechterhaltung der Methode gelungen, Übereinstimmung in den Resultaten für die Travelling-Wave-Tube mit den andern Autoren zu erreichen. In ZAMP 7 war die Kopplung zwischen Elektronenstrahl und Helix durch die Gleichungen

$$I_1 = \alpha i + p C_l E_{tot}, \quad dU_1 = E_{tot} dx, \quad (p + \Gamma v_0) v = \frac{e}{m} \alpha E_{tot}, \quad (p = j\omega)$$

gegeben. Die Setzung von  $\alpha E_{tot}$  in der Bewegungsgleichung ist falsch, denn dann folgt bei der Setzung  $E_{tot} = E_a + E_i$  aus  $I_1 = 0$  (keine Helix)  $E_i = -\alpha i / (p C_l)$ , womit  $E_i$  in der Bewegungsgleichung nur mit dem Faktor  $\alpha^2$  auf den freien Strahl wirken würde. Die Kopplung wird dann richtig beschrieben, wenn auf den Strahl das Feld  $E_2 = \alpha E_a + E_i$  und auf die Kopplungskapazität  $C_l/\text{cm}$  das Feld  $E_1 = E_a + \alpha E_i$  über den Kopplungsfaktor  $\alpha$  wirkt (Figur 2 in ZAMP 7, 240); hierbei ist

$$E_a = \frac{I_1}{p C_l} \quad \text{aus } E_1 \text{ für } E_i = 0 \quad (\text{kein Elektronenstrahl})$$

und

$$E_i = -\frac{i}{p C_l} \quad \text{aus } E_2 \text{ für } E_a = 0 \quad (\text{keine Helix})$$

unter Benützung von  $\Gamma E_i = 4\pi \varrho / F$  und der Kontinuitätsgleichung  $\Gamma i + p \varrho = 0$ . Dadurch bekommen die Gleichungen (8) und (9), S. 392 in ZAMP 3 (1952), eine etwas andere Gestalt (hier nur für einen Elektronenstrahl plus Helix geschrieben)

$$\left(E_a - \frac{\alpha i}{p C_l}\right) = \frac{p \Gamma^2 L}{p^2 L C - \Gamma^2 (1 + p^2 L C_l)} \alpha i, \quad i = \frac{e/m \cdot i_0/v_0 \cdot p}{(p + \Gamma v_0)^2} \left(\alpha E_a - \frac{i}{p C_l}\right).$$

Daraus folgt die charakteristische Gleichung für  $\Gamma$  nach Umformung mit

$$\Gamma_0 = \frac{p^2 L C}{(1 + p^2 L C_l)}, \quad \Gamma \approx \Gamma_0 = -\frac{j\omega}{v_0},$$

$$\Omega^2 = \frac{e}{m} \cdot \frac{\varrho_0}{C_l} = \frac{e}{m} 4\pi \frac{\varrho_0}{F} = \text{Plasmafrequenz},$$

$$\Gamma - \Gamma_0 = \frac{-\alpha^2 \Gamma_0^3 / C \cdot 1/2 \cdot e/m \cdot \varrho_0}{(p + \Gamma v_0)^2 + (1 - \alpha^2) \Omega^2}.$$

Damit ist Übereinstimmung mit der Gleichung in Part 3, Abschnitt I, von WARNECKE, DÖHLER und KLEEN [3] erreicht, wenn für den Kopplungswiderstand

$$R = \frac{\alpha^2 \omega^2}{v_0^3 C}, \quad C = \text{Kapazität/cm}$$

gesetzt wird.

Ohne den unterlaufenen Fehler wären wir schon in ZAMP 7 zwangsläufig auf die raumladungsgeschwächte Verstärkung  $\Gamma$  der Travelling-Wave-Tube gekommen. Die Korrektur des Fehlers bedingt jetzt im Gegensatz zu der Meinung in ZAMP 3 eine entscheidende Abhängigkeit der Raumladungsschwächung vom Kopplungsfaktor  $\alpha$ ; sie verschwindet ganz bei voller Kopplung  $\alpha = 1$  [und gibt Gleichung (13) ZAMP 3,  $\alpha = 0$  gibt Gleichung (10), (11), (12) ZAMP 3], in Über-



einstimmung mit meinen Bemerkungen über das Magnetron und die Figur 4, 8 von PIERCE in der voranstehenden Entgegnung. Es ist ferner ersichtlich, dass auch modellmässige – fehlerfreie – Behandlungen zu richtigen Resultaten führen. Schliesslich fühle ich mich der fördernden Kritik von Herrn KLEEN zu Dank verpflichtet.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. FREY und F. LÜDI, ZAMP 1, 237 (1950).
- [2] F. LÜDI, ZAMP 3, 390 (1952).
- [3] R. WARNECKE, O. DÖHLER und W. KLEEN, Wirel. Eng. 28, 167 (1951).
- [4] J. R. PIERCE, Figur 4, 8 (D. van Nostrand Company, Inc., New York 1950).
- [5] L. J. CHU und J. D. JACKSON, PIRE 36, 853 (1948).

---

### Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik vom 31. Mai bis 4. Juni 1955 in Berlin

Die nächste wissenschaftliche Jahrestagung der GAMM. findet in Berlin in der Zeit vom 31. Mai bis 4. Juni 1955 (Pfingstwoche) statt. Mit der Leitung des örtlichen Tagungsausschusses ist Herr Prof. Dr.-Ing. I. SZABO, Technische Universität Berlin-Charlottenburg, betraut.

H. GÖRTLER

---

### Acknowledgment

Professor H. FORD wishes to acknowledge the help of Dr. J.M.ALEXANDER in preparing Figures 10*b* to 10*d* in his paper in ZAMP 5, 1–35 (1954).

---

### Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

---

**Design of Crystal Vibrating Systems for Projectors and Other Applications.** By WILLIAM J. FRY, JOHN M. TAYLOR, and BERTHA W. HENVIS. Revised and Enlarged Second Edition (Dover Publications, New York, 1948). 182 pages with about 160 figures; \$3.95.

Die Piezokristalle finden in Technik und Wissenschaft immer mannigfachere Anwendungen, der Entwurf eines wirksamen Kristallelementes vorgegebener Charakteristik ist aber selbst für den Spezialisten eine zeitraubende Berechnungs- und Versuchsarbeit.

Der Inhalt des vorliegenden Buches entspricht den Untersuchungen zur Konstruktion der Unterwassersuchgeräte (SONAR). Das damit veröffentlichte Research Manual der amerikanischen Marine enthält in Tabellen und Kurven- tafeln alle nötigen Angaben für die Dimensionierung der kompliziertesten Anwendung des Piezokristalls als Schallstrahler, der gegen ein Medium beliebiger Schallhärte arbeitet und der aus Piezokristall, mit ein- oder beidseitig an den Endflächen angekitteten Trägheits- oder Stützkörpern, die aus ein bis drei verschiedenen Metallen zusammengesetzt sein können, besteht. Die notwendigen

Grössen, Eingangsimpedanz und Wirkungsgrad sind Kurventafeln zu entnehmen, ebenso für die Detektion andererseits die Empfindlichkeit des Elementes und seine akustische Impedanz. Kurze, vollständige Anleitungen sind den Kurventafeln vorangestellt, und als praktische Anwendungen sind die Beispiele Ammoniumphosphat und Seignettesalz angeführt. Diese beiden Salze bildeten das Ziel der Untersuchungen, da sie für den Aufbau von Schallstrahlern infolge ihrer hohen elektromechanischen Kopplung geeignet sind.

Der Vollständigkeit halber ist im zweiten Teil des Buches die Theorie der Schwingungen piezoelektrischer Körper mit beliebigen mechanischen und elektrischen Randbedingungen enthalten. Für den Gebrauch der Kurventafeln kommt man jedoch ohne deren Kenntnis aus.

S. Steinemann

**Randwertprobleme.** Von F. SCHWANK (B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951). 406 S., 147 Abb.; DM 22.80.

Der Titel «Randwertprobleme» umschreibt nur einen Teil – allerdings den grösseren – des im Buch behandelten Stoffes. Es kommen zur Hauptsache die folgenden Gebiete zur Sprache: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, speziell Randwertaufgaben, dann Funktionentheorie, Integralgleichungen, Variationsrechnung und Differenzgleichungen. Ein Anhang befasst sich vorwiegend mit unendlichen Reihen. Nur angedeutet oder nicht enthalten sind die eigentlichen numerischen Methoden, wie Differenzenverfahren und im weitern die Laplace-Transformation.

Der Anlage nach handelt es sich weder um ein Lehrbuch noch ein Handbuch, sondern es ist in erster Linie ein Werk, das dem Praktiker einen ersten Überblick über die Anwendungsmöglichkeiten der Analysis geben will. Aus diesem Grunde wurde keine Systematik angestrebt und auch kein lückenloser mathematischer Aufbau (keine Existenz- und Konvergenzbeweise). Die einzelnen Methoden werden an verhältnismässig einfachen Beispielen aus dem Gebiet der Ingenieurwissenschaften, der Elektrotechnik und der Physik erläutert. Die zum Verständnis der Beispiele notwendigen Zwischenrechnungen sind immer ausgeführt. Das Buch enthält als wesentlichen Bestandteil sehr viele Literaturangaben, die auf weitere und kompliziertere Probleme hinweisen.

Sehr erwünscht wäre ein ausführliches Namenverzeichnis, um das Auffinden der Literaturzitate zu erleichtern, eventuell auch noch eine systematische Zusammenstellung (etwa nach den Lösungsverfahren oder Sachgebieten geordnet) der behandelten und erwähnten Beispiele, was die Brauchbarkeit des Buches für den Praktiker erhöhen würde.

Im ganzen gesehen dürfte das Buch das gesteckte Ziel erreichen, dem Ingenieur oder Physiker bei der Lösung seiner Probleme behilflich zu sein; ebenso kann das Buch – es enthält besondere Hinweise auf mathematische Spezialwerke – auch einem Studenten der angewandten Mathematik dienen zu einer vorläufigen Orientierung.

E. Roth-Desmeules

**An Introduction to Statistics.** By E. CLARK (John Wiley & Sons, New York, 1953). 264 pp., \$4.25.

Elementare Darstellung der einfachsten Methoden und Resultate der modernen mathematischen Statistik für Leser mit geringer mathematischer Ausbildung. Die Theorie wird durch zahlreiche Beispiele aus der Praxis erläutert. Die Darstellung ist klar, die Auswahl des Stoffes zweckmässig. Das Buch eignet sich für eine erste Orientierung auf dem Gebiete der mathematischen Statistik sehr gut.

W. Saxer



ELEKTRONENMIKROSKOPE  
MIKROTOME  
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN  
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH

In Kürze erscheint

---

**Richter**

# **Elektrische Maschinen**

**Band IV: Die Induktionsmaschinen**

Berichtigte und ergänzte Neuauflage 1954  
480 Seiten mit 270 Figuren. Ganzleinen Fr. 36.40

Der Drehtransformator bei Vernachlässigung der Oberwellen – Wirkungsweise der mehrphasigen Induktionsmaschine bei Vernachlässigung der Oberwellen – Die Wirkungsweise der einphasigen Induktionsmaschine bei Vernachlässigung der Oberwellen – Kurzschlussläufer – Der Magnetisierungsstrom – Die Einzelwellen der Luftspaltinduktion – Die Blindwiderstände der Streuung – Die Momente und Kräfte der Oberwellen – Die Stromveränderungsmotoren – Anlauf und Bremsung – Drehzahlregelung – Verluste der Induktionsmaschine – Experimentelle Untersuchung – Entwurf

---

*Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung*

VERLAG BIRKHÄUSER, BASEL UND STUTTGART

*éclipsés*  
in jeder Technik



**SCHWITTER**  
**A-G**  
BASEL / ZÜRICH